Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 15, No. 3 (2025) 247–257.

Paper Type: Original Article

Regression Analysis of Low Beta Anomaly in a Stochastic Portfolio with Real Market Data

Soheila Mirzaei[1,*], Shokoufeh Banihashemi[1]

[1] Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Statistics, Allameh Tabatabaei University, Tehran, Iran; soheilamirzaee92@gamil.com; shbanihashemi@atu.ac.ir.

Citation:

Received: 14 May 2025 *Revised: 19 July 2025* *Accepted: 21 August 2025*	Mirzaei, S., & Banihashemi, Sh. (2025). Regression analysis of low beta anomaly in a stochastic portfolio with real market data. *Journal of Quality Engineering and Management*, 15(3), 247-257.

Abstract

Purpose: This research aims to empirically analyze the low beta anomaly within the framework of random basket theory using linear and quantile regression. This financial anomaly refers to the higher long-term returns of a portfolio of low-beta stocks than of a portfolio of high-beta stocks. This study examines the excess growth rate generated in a random portfolio based on this financial anomaly. The statistical population of this study consists of 8 stocks from the US stock market during the period 2015 to 2023.

Methodology: To achieve the research objectives, a continuous-time dynamic model with analytical solutions is proposed. To find its optimal weights or strategies, the "functionally generated portfolios" approach and the concept of "generating functions" are used. Finally, a regression analysis of US stock market data is conducted to examine the growth rate generated in this model.

Findings: The results show that investors are always trying to increase their investment returns by adopting an appropriate method. In this regard, higher returns from low-beta investment portfolios have been observed over the past few decades, and the use of random portfolios as a reasonable method to examine the portfolio's excess return in this financial anomaly is thus crucial.

Originality/Value: Given the innovative nature of this research in using stochastic portfolio theory to examine the excess growth rate generated based on the low beta anomaly, the results can help investors construct optimal portfolios with higher long-term returns.

Keywords: Portfolio generating functions, Beta risk measure, Low beta anomaly, Stochastic portfolio theory.

Corresponding Author: soheilamirzaee92@gamil.com

10.48313/jqem.2025.532332.1562

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۵، شماره (۳)، (۱۴۰۴)، ۲۵۷-۲۴۷

نوع مقاله: پژوهشی

تحلیل رگرسیونی ناهنجاری بتا پایین در سبد تصادفی با داده‌های واقعی بازار

سهیلا میرزائی[۱،*]، شکوفه بنی هاشمی[۱]

[۱]گروه ریاضی و کامپیوتر، دانشکده آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: هدف این پژوهش، تحلیل تجربی ناهنجاری بتا پایین در چارچوب نظریه سبد تصادفی با استفاده از رگرسیون خطی و صدکی است. این ناهنجاری مالی به بیان بازده بالاتر سبدی از سهام بتا پایین در مقابل سبدی از سهام بتا بالا در بلندمدت می‌پردازد و در این پژوهش به بررسی نرخ رشد مازاد ایجادشده در سبد تصادفی بر اساس این ناهنجاری مالی پرداخته می‌شود. جامعه آماری این پژوهش، ۸ سهام از بازار سهام آمریکا در بازه زمانی ۲۰۱۵ الی ۲۰۲۳ است.

روش‌شناسی پژوهش: در راستای دستیابی به اهداف پژوهش، مدل پویای زمان پیوسته با جواب‌های تحلیلی مطرح می‌شود که برای یافتن وزن‌ها یا استراتژی‌های بهینه آن از رویکرد "سبدهای تولیدشده تابعی" و مفهوم "توابع مولد" استفاده می‌گردد و درنهایت به تحلیل رگرسیونی داده‌های بازار سهام آمریکا برای بررسی نرخ رشد ایجادشده در این مدل پرداخته می‌شود.

یافته‌ها: نتایج نشان داده‌اند که سرمایه‌گذاران همواره در تلاش‌اند با اتخاذ روشی مناسب بازدهی سرمایه‌گذاری خود را افزایش دهند. در این راستا بازدهی بالاتر سبدهای سرمایه‌گذاری بتا پایین در طول چند دهه اخیر موردتوجه قرار گرفته و استفاده از سبد تصادفی به‌عنوان روشی قابل‌درک برای بررسی نرخ رشد مازاد سبد در این ناهنجاری مالی بسیار حایز اهمیت است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: با توجه به نوآوری این پژوهش در استفاده از نظریه سبد تصادفی برای بررسی نرخ رشد مازاد ایجادشده بر اساس ناهنجاری بتا پایین، نتایج می‌تواند به سرمایه‌گذاران در سرمایه‌گذاری در سبدهایی بهینه با بازدهی بلندمدت بالاتر کمک کند.

کلیدواژه‌ها: توابع مولد سبد، سنجه ریسک بتا، ناهنجاری بتا پایین، نظریه سبد تصادفی.

۱- مقدمه

در طی سالیان اخیر، سرمایه‌گذاری و کسب درآمد از بازارهای مالی جایگاه والایی در میان سرمایه‌گذاران داشته است، به‌طوری‌که به جهت کاهش ریسک و افزایش بازدهی به خرید سهام و تشکیل سبد دارایی روی آوردند. با گذشت زمان، سرمایه‌گذاران دریافتند که بهتر است برای حفاظت از دارایی‌های خود، سبدی متنوع از دارایی‌ها تشکیل دهند تا به هدف کسب بیشترین بازدهی ممکن در برابر سطح قابل قبولی از ریسک دست یابند. بررسی سنجه‌های ریسک نیز به سرمایه‌گذاران در راستای هدفشان کمک شایانی می‌کند. یکی از این سنجه‌های ریسک، سنجه ریسک β می‌باشد

که معیاری برای محاسبه ریسک سیستماتیک بازار است و می‌تواند به‌عنوان شاخصی برای رتبه‌بندی ریسک دارایی‌های مختلف به‌کار گرفته شود. بسیاری از مطالعات نشان داده‌اند که سبدهای سهام بتا پایین دارای نرخ رشد بالاتری نسبت به سبدهای سهام بتا بالا هستند و نویسندگان معمولا از آن نتیجه می‌گیرند که سهام بتا پایین نرخ رشد بیشتری نسبت به سهام بتا بالا دارند. سرمایه‌گذارانی که با ریسک بالاتر به دنبال بازدهی بالاتر هستند، مجبورند با وزن دهی بیش‌ازحد به سهام بتا بالا به این هدف دست یابند. در مبحث مالی رفتاری این ناهنجاری بر اساس فرضیه‌هایی همچون فرضیه خوش‌بینی بیش‌ازحد توضیح داده می‌شود. فرضیه خوش‌بینی بیش‌ازحد فرض می‌کند که سرمایه‌گذاران نسبت به سهام در حال رشد که بتا بالا هستند، بیش‌ازحد خوش‌بین‌اند. این عوامل منجر به ارزش‌گذاری بیش‌ازحد این سهام می‌شوند. همچنین باعث قیمت‌گذاری نادرست و ایجاد شکاف قیمت در سهام می‌گردد. درنتیجه فرصت نرخ رشد را برای سهام بتا پایین ایجاد می‌کند. ارزش‌گذاری بیش‌ازحد سهام بتا بالا منجر به ایجاد فرصتی برای نرخ رشد بالاتر سهام بتا پایین می‌شود که این پدیده را "ناهنجاری بتای پایین" می‌نامند. عملکرد بهتر سبدهای کم ریسک، یکی از بزرگ‌ترین ناهنجاری‌های مالی است، زیرا این امر برخلاف رفتار عقلایی سرمایه‌گذاران می‌باشد که طبق آن ریسک اضافی با بازده اضافی پاداش داده می‌شود. برای بررسی این ناهنجاری‌ها در سبدهای معاملاتی از نظریه سبد تصادفی [1] استفاده می‌کنیم. مدل‌های قابل قبولی برای ناهنجاری بتا پایین بر اساس نظریه سبد تصادفی وجود دارد که این مطالعه مدل‌هایی از این ناهنجاری [2] را رایه می‌کند که نیازی به محدودیت‌های سرمایه‌گذاری، رفتار غیرمنطقی سرمایه‌گذار را ندارد و وزن‌های بهینه این سبدها را به کمک توابع مولد می‌یابیم. این ناهنجاری بتا پایین به دلیل نوسانات نسبی در معاملات تعادل مجدد وزن‌های سبد است که منجر به سود معاملاتی شده و این سود معاملاتی همان نرخ رشد مازاد حاصل در سبد موردبررسی می‌باشد. بدین منظور ابتدا در بخش ۲ به بیان پیشینه پژوهش پرداخته می‌شود. در بخش ۳ مدل بهینه‌سازی سبد تصادفی برحسب نرخ رشد بیان می‌شود که جواب تحلیلی داشته و حل آن دشوار است و برای یافتن وزن‌های بهینه سبد رویکرد سبد تولیدشده تابعی و مفهوم تابع مولد در زیر بخش ۳-۳ بیان می‌شود. همچنین به کمک این توابع به ساخت سبدهایی بر اساس رتبه و سایز سهام پرداخته و ناهنجاری بتا پایین را در آن بررسی می‌کنیم. در بخش ۴ به بررسی این موضوع در سبدهای هم‌وزن می‌پردازیم و درنهایت در بخش ۵ به کمک روش رگرسیون به تحلیل داده‌ها و نتایج تجربی می‌پردازیم.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

نظریه سبد تصادفی یک نظریه توصیفی است که به مطالعه و توضیح پدیده‌های قابل‌مشاهده‌ای که در بازارهای سهام رخ می‌دهد، می‌پردازد. این نظریه به بررسی و تحلیل رفتار دارایی‌ها و بازار در بلندمدت می‌پردازد. نرخ رشد سبد تصادفی بسیار حایز اهمیت است، زیرا در آن مولفه نرخ رشد مازاد، ارایه می‌گردد که موجب می‌شود نرخ رشد سبد تصادفی از میانگین نرخ رشد دارایی‌ها بیشتر شود. یکی از کاربردهای نظریه سبد تصادفی، استفاده از آن برای بررسی تاثیر ناهنجاری‌های مالی است. عملکرد بهتر سبدهای کم ریسک، یکی از بزرگ‌ترین ناهنجاری‌های مالی است. ناهنجاری‌های مالی پدیده‌هایی هستند که توسط مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه[1] محاسبه نشده‌اند. این موضوع باعث شد که نتوان این ناهنجاری‌ها را به کمک مطالعات شارپ [3] بر اساس استاندارد مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه که معتقد است ریسک مرتبط با دارایی، ریسک سیستماتیک بازار است، اندازه‌گیری کرد. برای بررسی ناهنجاری‌های مالی در ابتدا بلک و همکاران [4] و سپس بیکر و همکاران [5] و درنهایت فرازینی و پدرسن [6] و لی و سالیوان [7] یک رابطه ناهنجاری بین بتا و بازده مرکب سالانه تعدیل‌شده با ریسک، برای سبدهایی که بر اساس بتای دارایی پایه آن‌ها تشکیل شده است، ثبت کرده‌اند. برای بررسی عملکرد سبد سهام هم‌وزن به کمک بتای سهام، بلک و همکاران [4]، بازده ماهانه همه سهام را مطالعه کرده‌اند که بتای هر سهم با استفاده از ۵ سال تقویمی گذشته محاسبه شده است و در آن سبد بازار، سبد هم‌وزن سهام *NYSE2* است. فرازینی و پدرسن [6] از رویکرد جدیدی برای تخمین بتا استفاده کرده‌اند. لی و سالیوان [7] سهام ماهانه *CRSP* را برای جولای ۱۹۶۳ تا دسامبر ۲۰۱۰ مطالعه می‌کنند که در آن بتای هر سهم از ۵ سال قبل محاسبه می‌شود. درحالی‌که روش‌های وزن دهی سبد و معیارهای عملکرد از یک مطالعه به مطالعه دیگر متفاوت است، نتایج مشابه بودند. مشخص شده است که سبدهایی از سهام‌های کم ریسک، بازده مرکب سالانه تعدیل‌شده با ریسک بیشتری نسبت به سبدهایی از سهام‌های پر ریسک دارند. همچنین بر اساس بازده سبدهای بلک و همکاران [4]، بیکر و همکاران [5] و لی و سالیوان [7] نیز این نتیجه حاصل می‌شود. بر اساس بازده سبدهای بیکر و همکاران [5] این نتیجه به‌دست می‌آید که سهام‌های کم ریسک، حتی بدون تعدیل

[1] Capital Asset Pricing Model (CAPM)

ریسک، نسبت به سهام با ریسک بالا، بازده مرکب سالانه بیشتری دارند. در این مطالعات توضیحات و دلایل مختلفی برای این "ناهنجاری بتا پایین" رایه شده است که به‌موجب آن سبد سهام بتا پایین عملکرد بهتری از سبد سهام بتا بالا دارد که عبارت‌اند از محدودیت‌های اهرمی و اعتباری (فرازینی و پدرسن [6] بر اساس بلک [4])، رفتار غیرمنطقی سرمایه‌گذار [5]، محدودیت‌های سازمانی برای آربیتراژ [8] و هزینه‌های معاملاتی [7]. همه سبدهایی که در مطالعات بالا و مواردی که در پژوهش "ناهنجاری نوسان پایین" آزمایش شده‌اند [9–12] سبدهایی هستند که بر اساس نوسانات (معمولا نوسانات غیر سیستماتیک) به‌جای بتا برای ساخت سبدهای نوسان پایین تشکیل می‌شوند. درحالی‌که مطالعات یادشده عمدتا نوسانات (غیر سیستماتیک یا کل) را به‌عنوان معیار ریسک درنظر گرفته‌اند، در این پژوهش تمرکز بر سنجه ریسک بتا به‌عنوان شاخص ریسک سیستماتیک بازار است. بااین‌حال، هیچ‌یک از مطالعات بیان‌شده، تلاشی برای ارزیابی نرخ‌های رشد دیفرانسیلی یافت شده سبدها، که به دلیل سودهای معاملاتی سیستماتیک ناشی از بازیابی و تعادل مجدد هستند نکرده است. بنابراین، نتیجه‌گیری مطالعات مبنی بر اینکه سهام بتا پایین دارای نرخ رشد بالاتری نسبت به سهام بتا بالا هستند، از این واقعیت که نرخ رشد سبد سهام بتا پایین بیشتر از سبد سهام بتا بالا است، زودهنگام است، اما اودردا و همکاران [13] از مطالعات فوق مستثنی هستند. آن‌ها در مطالعات خود نشان می‌دهند که ناهنجاری بتا پایین می‌تواند حتی بدون وجود نرخ‌های رشد دیفرانسیلی بین سهام بتا پایین و بالا رخ دهد. در مدل آن‌ها، تمرکز بر سوده‌ای ناشی از بازیابی وزن‌های هدف سبد در بازاری است که از تمرکز بر سهام منفرد پرهیز می‌کند. آن‌ها با بهره‌گیری از نظریه سبد تصادفی نشان می‌دهند که تعادل مجدد سیستماتیک، به‌تنهایی می‌تواند مزیت عملکردی برای سبدهای با وزن دهی بیشتر به سهام بتا پایین ایجاد کند. در سال‌های اخیر نیز مطالعات متعددی به بررسی بیشتر ناهنجاری بتا پایین پرداخته‌اند. اشنایدر و همکاران [14]، با استفاده از داده‌های بازار آمریکا، نشان داده‌اند که سهام بتا پایین اغلب بازده مازاد تولید می‌کند. پرراس و همکاران [15] نیز به بررسی این ناهنجاری با استفاده از دو استراتژی متفاوت برای تعیین وزن‌های سبد پرداخته‌اند که نتایج آن نشان می‌دهد که، در هر دو استراتژی، سبدهای نوسان پایین نسبت به سبد بازار عملکرد بهتری دارند. این نتایجی از بررسی جامع بازارهای آمریکا و اروپا، تداوم اثر ناهنجاری بتا پایین در بازارهای مالی را نشان داده‌اند.همچنین پژوهش‌های اخیر در بازارهای اسکاندیناوی که توسط گروبیس و همکاران [16] صورت گرفته است، شواهد مستقیمی از کارکرد تجربی ناهنجاری ریسک پایین و بتا پایین در دوره‌های پر نوسان رایه داده است. سبدهای ریسک پایین(نوعی از ناهنجاری بتا پایین)، در این بازارها نیز بازدهی مازاد و عملکرد بهتر نسبت به میانگین بازار داشته‌اند. بلیتز و همکاران [17]، بر پایداری این پدیده حتی در دوران پساکرونا تاکید می‌کنند. در تکمیل این رویکرد، مطالعات دیگری نیز به بررسی ساختار بهینه سبدهای سرمایه‌گذاری و مدل‌سازی مالی پرداخته‌اند. المرسی [18] به کاربرد اعداد فازی در مدل‌سازی ریسک و بازده برای انتخاب سبد دارایی پرداخته و با رایه مدلی برای بهینه‌سازی سبد دارایی امکان تنظیم ضریب ریسک فردی را در انتخاب سبد فراهم کرده است و می‌تواند چارچوبی برای مقایسه سبدهای کم ریسک باشد. ما در این پژوهش به کمک رگرسیون خطی و صدکی و داده‌های واقعی بازار به این موضوع می‌پردازیم که عملکرد بهتر این سبدها به دلیل یک رانش مثبت در فرآیند بازده نسبی لگاریتمی سبدها است که به فرآیند تعادل مجدد وزن‌ها و نوسانات نسبی آن، مربوط است و تحلیل نرخ رشد سبدها به کمک تحلیل رگرسیونی موردبررسی قرار می‌گیرد و عملکرد بهتر سبدهای بتا پایین برای داده‌های درنظر گرفته‌شده، تایید می‌گردد.

۳- مدل بهینه‌سازی سبد برحسب بازده و ریسک

در این بخش ابتدا مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس مارکوویتز در حالت زمان پیوسته بر اساس نرخ بازده بیان می‌گردد. سپس بر اساس اهمیت شاخص نرخ رشد نسبت به نرخ بازده، مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس برحسب نرخ رشد بیان می‌گردد و این معیار رفتار سبد دارایی در طولانی‌مدت را نشان خواهد داد.

۳-۱- مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس برحسب نرخ بازده

مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس مارکوویتز در حالت زمان پیوسته بر اساس نرخ بازده به‌صورت زیر است:

$$min\ Var(b_\pi(t)) = a_{\pi\pi}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t),$$

$$s.t.$$

$$E(b_\pi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)E(b_i) \geq b_{expected}(t), \tag{۱}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) = 1,$$

$$\pi_i(t) \geq 0;\ i = 1, \dots, n.$$

در رابطه بالا $a_{ij}(t)$ فرآیند ماتریس کوواریانس بوده که کوواریانس بین دو دارایی را نشان می‌دهد و برابر است با:

$$a_{ij}(t) := \sum_{\nu=1}^{d} \sigma_{i\nu}(t)\sigma_{j\nu}(t) = \big(\sigma(t)\sigma'(t)\big)_{ij}. \tag{۲}$$

با توجه به ساختار زمان پیوسته بودن، مدل مطرح‌شده، برنامه‌ریزی پویای زمان پیوسته می‌باشد و جواب‌های تحلیلی برای وزن‌ها یا استراتژی‌ها به دست می‌آید. در این مدل $b_{expected}$ همان نرخ بازده مورد انتظار و π_i وزن دارایی ith بوده و b_π بازده سبد و $a_{\pi\pi}$ واریانس سبد دارایی π است.

۲-۳- مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس برحسب نرخ رشد

در ابتدا تعاریفی از نرخ رشد دارایی و نرخ رشد سبد بیان شده و سپس مدل بر اساس آن‌ها نوشته می‌شود.

تعریف ۱- نرخ رشد دارایی مقداری را نشان می‌دهد که در یک دوره زمانی، ارزش سرمایه‌گذاری، دارایی یا یک کسب‌وکار افزایش پیدا می‌کند. درواقع صاحبان تجارت و کسب‌وکار به کمک نرخ رشد می‌توانند دریابند که میزان دارایی یا سرمایه‌گذاری آن‌ها در طول زمان چگونه رشد و تغییر کرده است و یا در شرایط مختلف چه وضعیتی خواهد داشت. در نظریه سبد تصادفی بررسی نرخ رشد هر دارایی در سبد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا نرخ رشد دارایی مالی، علاوه بر نرخ بازده دارایی به واریانس آن دارایی نیز وابسته است؛ بنابراین، نرخ رشد دارایی مالی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_i(t) := b_i(t) - \frac{1}{2}a_{ii}(t),\ i = 1, \dots, n, \tag{۳}$$

که در آن $b_i(t)$ نرخ بازده دارایی ith است.

تعریف ۲- نرخ رشد سبد π به نرخ رشد تک‌تک دارایی‌های موجود در سبد وابسته است اما همانند نرخ بازده سبد تصادفی، برابر با میانگین وزنی دارایی‌های موجود در سبد نبوده و به دلیل نرخ رشد مازاد سبد مقداری بیشتر از آن خواهد بود یعنی برابر است با:

$$\gamma_\pi(t) := \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \gamma_\pi^*(t), \tag{۴}$$

که در آن $\gamma_i(t)$ نرخ رشد دارایی ith است و $\gamma_\pi^*(t)$ نرخ رشد مازاد سبد تصادفی است که از رابطه زیر تعریف می شود:

$$\gamma_\pi^*(t) := \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)a_{ii}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t)\right). \tag{۵}$$

مدل بهینه‌سازی میانگین واریانس در سبد تصادفی برحسب نرخ رشد به‌صورت زیر است:

$$min\ a_{\pi\pi}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t),$$
$$s.t.$$
$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)a_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)a_{ij}(t)\pi_j(t)\right) \geq \gamma_0, \quad (۶)$$
$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) = 1,$$
$$\pi_i(t) \geq 0;\ i = 1, \dots, n,$$

که در آن π_i وزن‌ها یا استراتژی‌های سرمایه‌گذاری است و محدودیت آن می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)a_{ii}(t) \geq \gamma_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)a_{ij}(t). \quad (۷)$$

مدل مطرح‌شده، مدل پویای زمان پیوسته با جواب‌های تحلیلی برای وزن‌های یا استراتژی‌ها (π_i) می‌باشد. برای یافتن وزن‌های بهینه سبدهای تصادفی با توجه به پیچیدگی‌های مطرح‌شده در مدل‌های بالا، از رویکرد "سبدهای تولیدشده تابعی" و مفهوم "توابع مولد" که درواقع روشی برای یافتن وزن‌های بهینه سبد است، استفاده می‌شود که در زیر به کمک قضیه به آن می‌پردازیم.

۳-۳- سبد تولیدشده تابعی و تاثیر سایز

سبد تولیدشده تابعی جهت مطالعه تنوع در بازار استفاده می‌شود. این نوع از سبدها در بازارهای واقعی و سرمایه‌گذاری نیز مورداستفاده قرار می‌گیرند و فقط مختص به مطالعات نظری نیستند. این نوع سبدها به کمک توابع مولد تولید می‌شوند که در ادامه به بررسی خواهیم پرداخت.

قضیه ۱ – فرض کنید $G: U \to (0, \infty)$ یک تابع مثبت باشد که یک همسایگی بازی از مجموعه Δ_+^n است به‌طوری‌که نگاشت $x \mapsto x_i D_i log\ G(x)$ برای $i = 1, \cdots, n$ به مجموعه Δ_+^n محدود شده است. همچنین G یک تابع مثبت، دو بار مشتق‌پذیر در R است. پس G تابع مولد سبد π با وزن‌های زیر است:

$$\pi_i(t) = \left(D_i\, log\, G\big(\mu(t)\big) + 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_j(t)D_j\, log\, G\big(\mu(t)\big)\right) \cdot \mu_i(t),\ 1 \leq i \leq n. \quad (۸)$$

که در آن D_i به‌عنوان مشتق جزیی مرتبه اول نسبت به ith متغیر است و $\mu_i(t)$ وزن دارایی ith است. همچنین تابع G مقعر است یا به‌طور دقیق‌تر، هسیان آن حداکثر یک مقدار مشخص مثبت برای هر $x \in U$ دارد و اگر مقدار مشخص مثبت وجود داشته باشد، بردار ویژه متناظر با Δ_+^n متعامد است.

فرآیند ارزش نسبی سبد با توجه به بازار، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$lo\,g\left(\frac{V^\pi(T)}{V^\mu(T)}\right) = lo\,g\left(\frac{G\big(\mu(T)\big)}{G\big(\mu(0)\big)}\right) + \int_0^T \mathrm{g}(t)dt,\ 0 \leq T < \infty. \quad (۹)$$

که در آن $g(t)$ نشان‌دهنده فرآیند رانش است.

$$g(t) := \frac{-1}{2G\big(\mu(t)\big)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}^2 G\big(\mu(t)\big)\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t). \quad (۱۰)$$

در **رابطه (۹)**، V^π بیانگر ارزش سبد مذکور و V^μ ارزش سبد بازار است و در حقیقت با رویکرد سبد تولیدشده تابعی به دنبال سبدی هستیم که در بلندمدت ارزش بیشتری نسبت به سبد بازار داشته باشد.

در این پژوهش تابع مولد مورداستفاده در سبد وزن‌دار شده تابعی بر اساس رتبه و سایز سهام به‌صورت زیر است:

$$G(x) \equiv G_p(x) := (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}},\ 0 < p < 1. \quad (۱۱)$$

که فرآیند رانش آن به‌صورت $\mathfrak{g}(\cdot) \equiv (1-p)\gamma^{*}_{\mu^{(p)}}(\cdot)$ است.

رتبه سهام و سایز آن به دلایلی حایز اهمیت است. یکی از این دلایل آن است که برای درک نوسانات نسبی در نظریه سبد تصادفی، از توضیح اثر اندازه و عملکرد بهتر سبدی از سهام کوچک نسبت به سبدی از سهام بزرگ، استفاده شده است. همچنین رتبه‌بندی سهام بر اساس بتا، همانند رتبه‌بندی سهام بر اساس رتبه و اندازه آن است. دلیل دیگر آن است که رتبه سهام در عملیات تعادل مجدد وزن‌های سبد اهمیت بسیاری دارد.

۴- ناهنجاری بتا پایین در سبد سهام هم‌وزن

بتا معیاری برای محاسبه ریسک سیستماتیک است و نوسانات بازدهی سهام نسبت به بازار را می‌سنجد و طبق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\beta_i = \frac{Cov(b_i, b_m)}{Var(b_m)}. \tag{۱۲}$$

فرض کنید ماتریس کواریانس بازده سهام ثابت باشد، آنگاه ناهنجاری بتا پایین رخ می‌دهد که به سبب نوسانات نسبی می‌باشند که ناشی از سود معاملاتی در معاملات بازیابی تعادل مجدد وزن‌ها هستند و منجر به ایجاد نرخ رشد مازاد در سبدهای موردبررسی می‌شود. این نرخ رشد مازاد ایجادشده از طریق تعادل مجدد سبدهای تصادفی موردبررسی ایجاد می‌شوند که به نفع سبد سهام بتای پایین در مقابل سهام بتای بالا است که برای سبد سهام هم‌وزن که وزن‌های آن از رابطه زیر به دست می‌آید، بررسی می‌گردد.

$$\pi_i(\cdot) := \mu_i^{(0)}(\cdot) \equiv \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{۱۳}$$

قضیه ۲- سبد سهام هم‌وزن ρ را درنظر بگیرید. نرخ رشد مازاد سبد هم‌وزن از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma^{*}_{\rho}(t) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\right). \tag{۱۴}$$

قضیه ۳- بازده ارزش نسبی سبد سهام هم‌وزن نسبت به بازار، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$lo\ g\left(\frac{V^{\varphi}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) = \frac{1}{n} lo\ g\left(\frac{\mu_1(T)\cdots\mu_n(T)}{\mu_1(0)\cdots\mu_n(0)}\right) + \int_0^T \gamma^{*}_{\varphi}(t)dt. \tag{۱۵}$$

همان‌طور که در رابطه بالا مشاهده می‌شود، بازده ارزش نسبی سبد نسبت به سبد بازار به تغییرات وزن و نرخ رشد مازاد سبد وابسته است که نرخ رشد ایجادشده در این ناهنجاری به‌صورت نرخ رشد مازاد مشهود است.

۵- نتایج عددی

در راستای بررسی ناهنجاری بتا پایین در نظریه سبد تصادفی که پیش‌ازاین موردبررسی قرار گرفت، به کمک داده‌های قیمت روزانه ده سهام از بازار سهام آمریکا یک مطالعه تجربی انجام می‌شود. این داده‌ها با سرمایه‌گذاری در بازه زمانی ۸ ساله بین سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۲۳ بررسی می‌شود. به کمک داده‌های واقعی، چهار سهم از سهام بتا پایین و چهار سهم از سهام بتا بالا انتخاب شده تا به بررسی بازده بالاتر سبدی از سهام بتا پایین در بلندمدت در بازار مالی پرداخته شود. معیار انتخاب این سهام تلاش برای جلوگیری از تمرکز بر روی یک صنعت و کنترل بهتر تنوع بازار در سطوح مختلف ریسک بوده است، به‌طوری‌که سهام از صنایع مختلف شامل انرژی، سلامت، فناوری، خرده‌فروشی و مالی انتخاب شده‌اند. معیار انتخاب همچنین شامل در دسترس بودن داده‌های تاریخی، تنوع در سطح بتا بوده است به‌طوری‌که شرکت‌هایی مانند *WEC* نماینده سهام بتا پایین و شرکت‌هایی مانند *HAL* نماینده سهام بتا بالا درنظر گرفته شده است. این ترکیب به درک بهتر اثرات ریسک سیستماتیک در سبدها کمک می‌کند. بتای هر سهم نسبت به شاخص مرکز تحقیقات قیمت اوراق بهادار از طریق رگرسیون بازده سهام بر بازده شاخص از **رابطه (۱۲)** محاسبه گردیده و در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۱- بتای سهام نسبت به شاخص.

Table 1- Beta of the stock relative to the index.

Stock	Beta
WEC (Wisconsin Energy Corp	0.448
SFM (Sprouts Farmers Market Inc)	0.448
ATO (Atmos Energy Corp)	0.542
ERIE (Erie Indemnity Company)	0.595
C (Citigroup Inc)	1.247
HCA (Hca Holdings Inc. Common Stock)	1.321
HAL (Halliburton Company)	1.357
AVT (Avent lnc)	1.053

در جدول بالا ضرایب بتای مربوط به سهام انتخابی نمایش داده شده‌اند. بازده روزانه سبدها به کمک میانگین بازده سهام موجود در سبدها محاسبه شده است و خلاصه‌ای از اطلاعات آماری میانگین بازده سالانه، انحراف معیار و نسبت شارپ برای سبدهای تشکیلی بتا بالا و بتا پایین و سبد تفاضلی در جدول زیر بیان شده است.

جدول ۲- بازده سالانه، نوسانات و نسبت شارپ.

Table 2- Annual returns, volatility and Sharpe ratio.

Year	Return (Low)	Std Dev (Low)	Sharpe (Low)	Return (High)	Std Dev (High)	Sharpe (High)	Return (LMH)	Std Dev (LMH)	Sharpe (LMH)
2015	0.0114	0.1463	0.0781	-0.0247	0.2468	-0.1003	0.0362	0.2625	0.1378
2016	0.0232	0.1417	0.1639	0.2731	0.257	1.0629	-0.2499	0.2745	-0.9102
2017	0.1407	0.112	1.2559	-0.0419	0.1531	-0.2733	0.1825	0.1786	1.0222
2018	0.0353	0.1466	0.2405	-0.4235	0.2218	-1.9096	0.4588	0.2327	1.9715
2019	0.1333	0.1251	1.0659	0.1114	0.2693	0.4138	0.0218	0.2892	0.0756
2020	0.0581	0.3402	0.1708	-0.2403	0.7346	-0.3271	0.2984	0.6573	0.4539
2021	0.0845	0.1585	0.5331	0.1279	0.3026	0.4228	-0.0435	0.3332	-0.1304
2022	0.1055	0.2228	0.4735	0.1977	0.3427	0.5768	-0.0922	0.3308	-0.2787
2023	0.1411	0.1571	0.8979	0.0468	0.2448	0.1912	0.0942	0.2563	0.3677

در جدول بالا بازده سالانه، انحراف معیار سالانه و نسبت شارپ برای سبد بتا پایین و سبد بتا بالا و همچنین این مقادیر برای سبد تفاضلی (که مقدار تفاوت دو سبد) در سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۲۳ نمایش داده شده است که همان‌طور که مشاهده می‌شود، در بسیاری از سال‌ها سبد بتا پایین بازدهی بالاتر و نسبت شارپ بیشتر نسبت به سبد بتا بالا دارد که بیانگر بازده تعدیل‌شده با ریسک بهتر برای این سبد است.

برای بررسی معناداری آماری تفاوت میانگین بازده روزانه سبدهای بتا پایین و بتا بالا، از آزمون آماری t مستقل استفاده شده است.

جدول ۳- بررسی معناداری تفاوت میانگین بازده سبدها.

Table 3- Examining the significance of the difference in average returns of the portfolios.

T-Statistic	P-Value
0.6017	0.5474

باوجودآنکه در **جدول ۲**، اختلاف قابل‌توجهی در میانگین بازده سالانه و نسبت شارپ بین دو سبد مشاهده می‌شود، نتایج در **جدول ۳** نشان می‌دهد که این تفاوت در سطح بازده‌های روزانه، از نظر آماری معنادار نیست که این عدم معناداری می‌تواند ناشی از نوسانات روزانه یا حجم محدود سبدها باشد و لزوما به معنای نبود اختلاف واقعی در عملکرد بلندمدت نیست. لازم به ذکر است که اگرچه **جدول ۲**، بازده سالانه سبدها را برای بررسی ثبات عملکرد در سال‌های مختلف نشان می‌دهد، آزمون آماری t بر اساس بازده‌های روزانه کل دوره انجام شده است؛ بنابراین، تفاوت در سطوح معناداری آماری می‌تواند ناشی از تفاوت سطح تجمیع داده‌ها باشد.

اطلاعات رگرسیون خطی بازده لگاریتمی سبد سهام بتا پایین و بتا بالا بر تغییرات تنوع بازار در جدول زیر بیان شده است.

جدول ۴- نتایج رگرسیون.

Table 4- Regression results.

Intercept (α)	Beta (Market)	R-squared	P-value (Beta)
0.000629	-0.7421	0.1676	0.00000

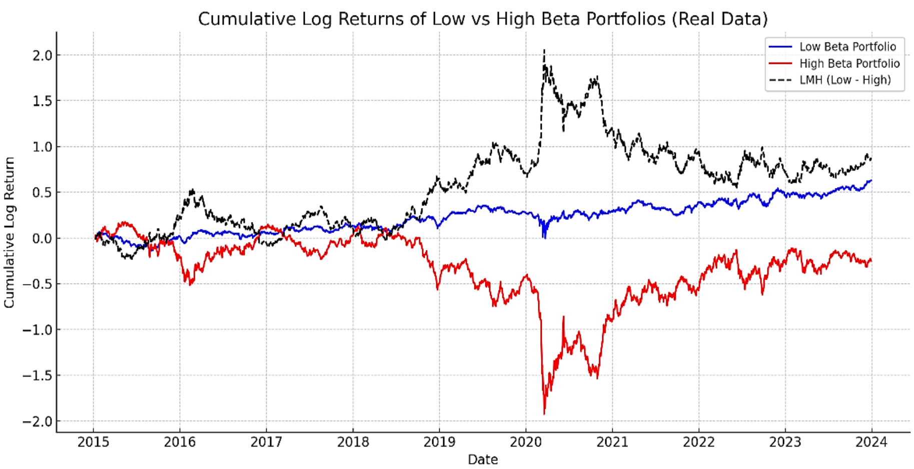
در این جدول، نتایج رگرسیون بازده مازاد سبد بتا پایین نسبت به سبد بتا بالا بر بازده روزانه بازار رایه شده است. ضریب بتا برای بازار در این رگرسیون مقدار منفی دارد و از نظر آماری معنادار است. منفی بودن این ضریب، بازتاب‌دهنده ماهیت خاص سبدهای بتا پایین در چارچوب نظریه سبد تصادفی است. در این نظریه برخلاف مدل‌های کلاسیک، عملکرد بهتر سبدهای بتا پایین، از نوسانات نسبی حاصل می‌گردد نه ارتباط مستقیم با روند بازار. بااین‌حال، مقدار پایین *R2* در این مدل نشان می‌دهد که مدل رگرسیون خطی تنها بخش محدودی از تغییرات بازده مازاد را توضیح می‌دهد؛ بنابراین، برای تحلیل دقیق‌تر رابطه بین بازده *LMH* و بازار در سطوح مختلف توزیع بازده، از مدل رگرسیون صدکی استفاده شده است که در ادامه بیان می‌شود.

جدول ۵- نتایج رگرسیون صدکی.

Table 5- Results of percentile regression.

Quantile	Intercept (α)	Market Beta (β)	P-value
0.10	0.000407	-0.562300	0.001400
0.25	0.000524	-0.633200	0.000600
0.50	0.000611	-0.721100	0.000000
0.75	0.000680	-0.788500	0.000000
0.90	0.000792	-0.853700	0.000000

نتایج رگرسیون صدکی در جدول فوق نشان می‌دهد که ضریب بتا بازار در تمام صدک‌ها منفی و معنادار است، همچنین افزایش قدر مطلق بتا در صدک‌های بالاتر نشان می‌دهد که در شرایطی که بازده بازار زیاد است، عملکرد نسبی سبد بتا پایین نسبت به سبد بتا بالا تشدید می‌شود. این یافته‌ها به‌خوبی ناهنجاری بتا پایین را تایید می‌کند و نسبت به مدل خطی ساده، تحلیل دقیق‌تری از رفتار بازده رایه می‌دهند. حال نمودارهای بازدهی سبد سهام بتا پایین و بتا بالا و رشد تجمعی سبدها به‌صورت زیر است:

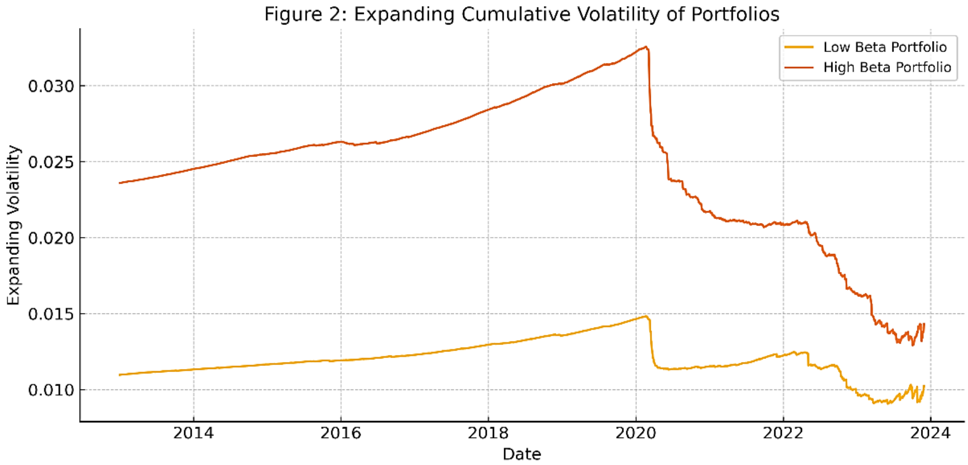


شکل ۱- بازده تجمعی لگاریتمی سبدها.

Figure 1- Logarithmic cumulative returns of portfolios.

که در آن نمودار آبی‌رنگ، بیانگر بازدهی سبد سهام بتا کوچک و نمودار قرمزرنگ، بیانگر بازدهی سبد سهام بتا بالا بوده که به‌وضوح طبق نمودار، سبد سهام بتا پایین عملکرد بالاتری نسبت به سبد سهام بتا بالا دارد و نمودار مشکی‌رنگ این تفاوت بازدهی را نشان می‌دهد.

نمودار نوسان تجمعی سبدهای بتا پایین و بتا بالا به‌صورت انباشته‌شده از ابتدای دوره محاسبه‌شده و به‌صورت زیر نمایش داده شده است:



شکل ۲- نوسان تجمعی سبدها.

Figure 2- Cumulative volatility of baskets.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در تمام طول دوره، نوسان سبد بتا بالا به‌طور معناداری از سبد بتا پایین باقی مانده است که تایید محکمی بر چارچوب نظری مقاله به‌حساب می‌آید.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش قصد داشتیم به کمک رگرسیون خطی و صدکی بر روی داده‌های بازار سهام آمریکا در بازه زمانی ۲۰۱۳ تا ۲۰۲۳، به بررسی ناهنجاری بتا پایین و نرخ رشد مازاد بالاتر در بلندمدت در سبد سهام بتا پایین نسبت به سبد سهام بتا بالا بپردازیم. این نتایج به‌خوبی ناهنجاری بتا پایین در چارچوب نظریه سبد تصادفی را نشان داده و به‌خوبی فرضیه پژوهش را تایید می‌کند. به‌طورکلی هدف از سرمایه‌گذاری در سبدهای دارایی، دستیابی به استراتژی برای دریافت بازده بالاتر در بلندمدت بوده که در این پژوهش به این مهم دست یافتیم.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی خود را از داوران محترم اعلام می‌دارند، بی‌شک دیدگاه ارزشمند ایشان در بهبود کیفیت مقاله نقش بسزایی داشته است.

تعارض با منافع

هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد و همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله اثر اصلی آن‌ها بوده و پیش‌ازاین چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نیست.

منابع مالی

در طول انجام این پژوهش هیچ‌گونه کمک‌هزینه خاصی از هیچ موسسه، سرمایه‌گذار در بخش عمومی، خصوصی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نشده است.

دسترسی به داده‌ها

داده‌های به‌کار رفته در این پژوهش، مبتنی بر اطلاعات واقعی استخراج‌شده از منابع *INVESTING.COM* جمع‌آوری شده است و در صورت ارایه درخواست موجه از سوی پژوهشگران دیگر، امکان دسترسی به داده‌ها از سوی نویسنده مسئول فراهم خواهد بود.

منابع

[1] Fernholz, E. R. (2002). Stochastic portfolio theory. In *Stochastic portfolio theory* (pp. 1–24). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3699-1_1
[2] Agapova, A., Ferguson, R., & Leistikow, D. (2019). Stochastic portfolio theory and the low beta anomaly. *The european journal of finance*, *25*(5), 415–434. https://doi.org/10.1080/1351847X.2018.1531901
[3] Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, *19*(3), 425–442. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x
[4] Black, F., Jensen, M. C., Scholes, M., & Others. (1972). *The capital asset pricing model: Some empirical tests.* https://www.efalken.com/LowVolClassics/blackjensenscholes.pdf
[5] Baker, M., Bradley, B., & Wurgler, J. (2011). Benchmarks as limits to arbitrage: Understanding the low-volatility anomaly. *Financial analysts journal*, *67*(1), 40–54. https://doi.org/10.2469/faj.v67.n1.4
[6] Frazzini, A., & Pedersen, L. H. (2014). Betting against beta. *Journal of financial economics*, *111*(1), 1–25. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2013.10.005
[7] Li, X., & Sullivan, R. N. (2014). Investing in the asset growth anomaly across the globe. *Journal of investment management*, *13*(4), 87–107. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2434561
[8] Brennan, M. J. (1993). *Agency and asset pricing*. https://escholarship.org/uc/item/53k014sd
[9] Ang, A., Hodrick, R. J., Xing, Y., & Zhang, X. (2006). The cross-section of volatility and expected returns. *The journal of finance*, *61*(1), 259–299. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2006.00836.x
[10] Ang, A., Hodrick, R. J., Xing, Y., & Zhang, X. (2009). High idiosyncratic volatility and low returns: International and further US evidence. *Journal of financial economics*, *91*(1), 1–23. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2007.12.005
[11] Blitz, D., & Van Vliet, P. (2007). The volatility effect: Lower risk without lower return. *Journal of portfolio management*, *34*(1). https://doi.org/10.3905/jpm.2007.698039
[12] Clarke, R. G., De Silva, H., & Thorley, S. (2010). Know your VMS exposure. *The journal of portfolio management*, *36*(2), 52–59. https://www.researchgate.net/profile/Roger-Clarke-2/publication/247906317_Know_your_VMS_exposure/links/550b41e20cf2855640970458/Know-your-VMS-exposure.pdf
[13] Oderda, G., Berrada, T., Messikh, R. J., & Pictet, O. (2015). Beta-arbitrage strategies: When do they work, and why? *Quantitative finance*, *15*(2), 185–203. https://doi.org/10.1080/14697688.2014.938446
[14] Schneider, P., Wagner, C., & Zechner, J. (2020). Low-risk anomalies? *The journal of finance*, *75*(5), 2673–2718. https://doi.org/10.1111/jofi.12910
[15] Perras, P. J., Reberger, A., & Wagner, N. (2020). The low-volatility anomaly revisited. *Credit and capital markets--kredit und kapital*, *53*(2), 221–244. https://elibrary.duncker-humblot.com/article/58171/the-low-volatility-anomaly-revisited
[16] Grobys, K., Hartikainen, E., & Äijö, J. (2025). Low-risk anomalies: Evidence from the Nordic equity markets. *Applied economics*, 1–20. https://doi.org/10.1080/00036846.2025.2497563
[17] Blitz, D., Howard, C., Huang, D., & Jansen, M. (2024). *Low-risk alpha without low beta*. https://doi.org/10.3905/jpm.2024.1.657
[18] El-Morsy, S. (2023). Stock portfolio optimization using pythagorean fuzzy numbers. *Journal of operational and strategic analytics*, *1*(1), 8–13. https://doi.org/10.56578/josa010102

پیوست الف

از آنجایی که در سبد سهام هم وزن، تمامی سهام‌ها وزن یکسان می‌گیرند، با قراردادن مقدار $\pi_i(t), \pi_j(t) = \frac{1}{n}$ در **رابطه (۵)** خواهیم داشت:

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_{ii}(t) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n})\, a_{ij}(t)\right),$$

و در نهایت با فاکتور گیری خواهیم داشت:

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\right).$$

جهت بررسی اثبات به صورت دقیق تر به [1] مراجعه شود.

پیوست ب

رابطه (۵) در رابطه زیر جایگذاری می کنیم:

$$lo\ g\big(V^{\pi}(T)\big) = \frac{1}{n} lo\ g\left(\frac{X_1(T)\cdots X_n(T)}{X_1(0)\cdots X_n(0)}\right) + \int_0^T \gamma_{\pi}^{*}(t)dt,$$

و به عبارت زیر می رسیم:

$$d\,log\left(\frac{V^{\pi}(t)}{V^{\mu}(t)}\right) = \frac{1}{n}\left[\left(\gamma_i(t) - \gamma_{\mu}(t) + \frac{1}{2}a_{ii}(t)(t)\right)dt + \sum_{\nu=1}^{d} \big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big)\,dW_{\nu}(t)\right] - \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)a_{ij}(t)(t)\right)dt.$$

حال با توجه به اینکه سبد مورد نظر دارای وزن یکسان است، قرار می دهیم $\pi_i(t), \pi_j(t) = \frac{1}{n}$ و به مقدار زیر می رسیم:

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}a_{ii}(t)(t)\right)dt + \frac{1}{n}[\big(\gamma_i(t) - \gamma_{\mu}(t)\big)dt + \sum_{\nu=1}^{d} \big(\sigma_{i\nu}(t) - \sigma_{\mu\nu}(t)\big)dW_{\nu}(t)].$$

قسمت اول عبارت بالا همان رابطه $\gamma_{\pi}^{*}(t)$ در **رابطه (۵)** است و با انتگرال‌گیری به رابطه زیر می رسیم:

$$lo\ g\left(\frac{V^{\pi}(T)}{V^{\mu}(T)}\right) = \frac{1}{n} lo\ g\left(\frac{\mu_1(T)\cdots \mu_n(T)}{\mu_1(0)\cdots \mu_n(0)}\right) + \int_0^T \gamma_{\pi}^{*}(t)dt.$$

جهت بررسی اثبات به صورت دقیق تر به [1] مراجعه شود.