



Paper Type: Original Article

Optimization for Enhancing the Quality of the Queueing Model Family $\{M/E_r/1, r \in N\}$ Based on the Cost Function, Probability of System Stationarity, and Customer Satisfaction under a Finite Time Horizon

Shahram Yaghoobzadeh Shahrastani¹, Amrollah Jafari¹, Iman Makhdoom^{1,*}

¹ Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; yagoubzade@pnu.ac.ir; amrollahjafari@pnu.ac.ir; Makhdoom@pnu.ac.ir.

Citation:

Received: 18 April 2025

Revised: 22 June 2025

Accepted: 11 July 2025

Yaghoobzadeh Shahrastani, Sh., Jafari, A., & Makhdoom, I. (2025). Optimization for enhancing the quality of the queueing model family $\{M/E_r/1, r \in N\}$ based on the cost function, probability of system stationary, and customer satisfaction under a finite time horizon. *Journal of Quality Engineering and Management*, 15(3), 271-280.

Abstract

Purpose: This study aims to determine the optimal model within the family of queueing models, where interarrival times follow an exponential distribution and service times follow an Erlang distribution, under a finite stopping time TTT. The significance of this research lies in its application to optimizing the performance of service systems using queueing theory.


Methodology: To select the optimal model, a cost function and a performance metric, namely the average customer satisfaction level, are first defined. Subsequently, a new index, named ORS, is introduced based on the cost function, average customer satisfaction, and the system's stability probability. The optimal model is identified as the one with the highest ORS value. Numerical analysis is employed to demonstrate the procedure for determining the optimal model.

Findings: The numerical results indicate that the ORS index is an effective criterion for evaluating and comparing different queueing models, enabling optimal model selection by incorporating multiple performance aspects.

Originality/Value: The main contribution of this research is the introduction of the ORS index as a novel and comprehensive measure for optimal model selection in queueing systems. This approach can enhance service system design and improve customer satisfaction levels in practical applications.

Keywords: Erlang distribution, Cost function, Average degree of customer satisfaction, Family of models $\{M/E_r/1, r \in N\}$, Stationary probability.

 Corresponding Author: Makhdoom@pnu.ac.ir

 10.48313/jqem.2025.537574.1567



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).

$E_k/1$ توسط هاریش چاندران و سوبارائو [5] انجام شد. تحقیقی هم در زمینه کنترل کیفیت در مدل $M/E_k/1$ توسط جاین و دهیانی [6] صورت گرفته شد. برآورد بیزی پارامترها در مدل $M/E_r/1$ توسط چادهوری و میتی [7]، برآورد بیزی پارامترها در انواع مدل‌های صف‌بندی توسط جوس و مانوهاران [8]، برآورد پارامترها در مدل $M/E_r/1$ به روش‌های درستمایی ماکسیمم و بیزی توسط وایدیانانان و چاندراساخار [9] و برآورد بیزی پارامترها با استفاده از توزیع پیشین دو متغیره توسط دیپچی و جوس [10] به‌دست آورده شد. به تازگی مخدوم و یعقوب زاده شهرستانی [11] برآورد بیزی در مدل صف‌بندی $M/M/1$ را تحت داده‌های سانسور شده نوع دوم بر اساس داده‌های فازی به‌دست آورده‌اند. کیفیت سیستم‌های صف‌بندی $M/M/m/K$ با استفاده از بهینه‌سازی تابع هزینه سیستم بررسی شد [12]. یک برآورد آماری بهینه برای پارامتر شدت ترافیک در مدل صف‌بندی $M/M/1/K$ بر اساس معیارهای فازی و غیر فازی توسط مخدوم [13] ارائه شد.

در این مقاله برای مدل $M/E_r/1$ معیاری به نام متوسط درجه رضایت مشتری، بر اساس متوسط تعداد مشتری‌های موجود در صف و سیستم تابع هزینه و سپس بر اساس تابع هزینه و متوسط درجه رضایت مشتری و احتمال پایایی سیستم، شاخصی جدید به نام نرخ کارایی سیستم به معرفی می‌شوند تا بر اساس آن مدل بهینه تعیین گردد. ساختار مقاله به این صورت است. در بخش دوم، توزیع ارلانگ و سیستم صف‌بندی $M/E_r/1$ معرفی و بعضی از معیارهای ارزیابی این سیستم‌ها ارائه شد. در بخش سوم، فرم کلی تابع هزینه و شاخص ORS معرفی و نحوه بهینه‌سازی سیستم‌های $M/E_r/1$ توضیح داده شد. در بخش چهارم با استفاده از تحلیل عددی، مدل بهینه برای خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ تعیین شد.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش توزیع ارلانگ و مدل صف‌بندی $M/E_r/1$ به‌طور مختصر معرفی و سایر مطالب موردنیاز در مقاله ارائه می‌شود.

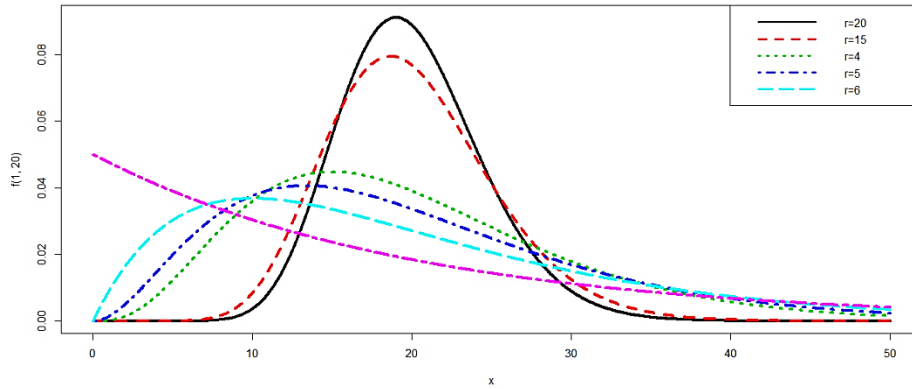
۲-۱- توزیع ارلانگ

ساده‌ترین مدل‌های صف‌بندی آن‌هایی هستند که بر اساس متغیر تصادفی نمایی ساخته شده‌اند. خاصیت بی‌حافظه بودن این متغیر تصادفی، تحلیل مدل‌های نمایی را بسیار آسان می‌سازد؛ بنابراین، بیشتر مسایل صف‌بندی در چارچوب مدل‌های نمایی فرمول‌بندی می‌شوند؛ اما همه آن‌ها در این قالب جا داده نمی‌شود. متغیرهای تصادفی مانند مدت‌زمان سرویس و یا زمان بین دو ورود مشتری‌ها در سیستم‌های صف‌بندی از توزیع‌های متنوعی پیروی می‌کنند که توزیع ارلانگ یکی از معروف‌ترین آن‌هاست.

تعریف ۱- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به‌صورت

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0, \lambda > 0, r \in N.$$

توزیع ارلانگ به فرم فوق در این مقاله با نماد $E_r(r, \lambda)$ نشان داده می‌شود. میانگین این متغیر تصادفی $\frac{r}{\lambda}$ و واریانس آن $\frac{r}{\lambda^2}$ است. در حالت خاص اگر $r = 1$ باشد، توزیع ارلانگ به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر r در صورت ثابت ماندن میانگین، توابع مختلفی به‌دست می‌آید که در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱ مشاهده می‌شود که مجموعه توابع ارلانگ بسیار متنوع هستند و داده‌های آماری بسیاری از متغیرهای تصادفی با یکی از توابع این مجموعه منطبق می‌شود. به‌عنوان مثال اگر داده‌های آماری متغیر تصادفی مدت‌زمان سرویس (خدمت) در یک سیستم صف‌بندی در اختیار باشد به کمک این داده‌ها میانگین و واریانس این متغیر تصادفی تخمین زده می‌شود. با توجه به متنوع بودن توزیع ارلانگ، امکان زیادی وجود دارد که داده‌های موردنظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگ همین خاصیت تنوع آن است که بسیاری از متغیرهای تصادفی در قالب آن جای داده می‌شود.



شکل ۱- نمودار توزیع ارلانگ با r متفاوت با فرض ثابت ماندن میانگین.

Figure 1- Erlang distribution diagram with different r assuming the mean remains constant.

اگرچه توزیع ارلانگ از نظر محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، اما در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به متغیر تصادفی نمایی نزدیک تر است و در مواردی با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بی حافظگی استفاده می کند. برای آن که بتوان از خاصیت بی حافظگی توزیع نمایی استفاده کرد، می توان متغیر تصادفی ارلانگ را به چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. به عنوان مثال متغیر تصادفی ارلانگ با $r = 2$ به صورت مجموع دو متغیر تصادفی نمایی نوشته می شود. مزیت عمده آن نسبت به توزیع نمایی این است که در عمل پدیده های تصادفی بسیاری برحسب آن بیان می شود.

۲-۲- مدل صف بندی $M / E_r / 1$

در این سیستم مشتری ها با آهنگ λ وارد می شوند که زمان بین ورودها یعنی $\{U_k, k \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و زمان های سرویس یعنی $\{V_k, k \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع $E_r(r, r\mu)$ و با تابع چگالی احتمال

$$f(v, \mu, r) = \frac{(r\mu)^r}{\Gamma(r)} v^{r-1} e^{-r\mu v}, v > 0, \mu > 0, r \in N,$$

هستند. در این بخش λ ، μ و r پارامترهای نامعلوم در نظر گرفته می شوند. اگر بر اساس روگری و همکاران [14] توزیع پیشین λ توزیع $\text{Gamma}(v_1, a)$ با $v_1 \in N$ و $a > 0$ و توزیع پیشین توام (μ, r) توزیعی با تابع چگالی

$$f(\mu, r) \propto \frac{\theta^{r-1} r (r\mu)^{rv_2-1} e^{-rb\mu}}{\Gamma(r)v_2}, \mu > 0, r \in N,$$

فرض شوند به طوری که $\theta, b > 0$ و $v_2 \in N$ ثابت های معلوم و $\left(\frac{v_2}{b}\right)^{v_2} < 1$ باشند، آنگاه تابع احتمال r به صورت

$$P(r) \propto \frac{\Gamma(rv_2)}{\Gamma(r)v_2} \left(\frac{\theta}{b}\right)^{r-1}, r = 1, 2, \dots$$

به دست آورده می شود (ویپر [3]). با فرض $v_2 = 1$ و $\theta < b$ توزیع r هندسی با پارامتر $1 - \frac{\theta}{b}$ است که در این مقاله در نظر گرفته می شود.

$$P(r) = \left(1 - \frac{\theta}{b}\right) \left(\frac{\theta}{b}\right)^{r-1}, r = 1, 2, \dots$$

در سیستم صف بندی $M / E_r / 1$ پارامتر شدت ترافیک سیستم نام دارد که تحت شرط $\rho < 1$ پایا است (اینسوا و همکاران [4]). از آنجایی که حالت پایایی، ویژگی مهم هر سیستم صف بندی هست، بنابراین، اطلاع داشتن مقدار متوسط ρ تحت شرط $\rho < 1$ ضروری است که از رابطه

$$E(\rho | \rho < 1) = \frac{bv_1}{av_2 P_\rho} \sum_{r=1}^{\infty} P(r) \left(1 - \frac{1}{rv_2}\right)^{-1} \left[1 - \sum_{i=0}^{v_1} \binom{rv_2 + i - 2}{i} P_r^{rv_2-1} (1 - P_r)^i\right]. \quad (1)$$

به دست آورده می شود [15]، طوری که $P_r = \frac{rb}{a+rb}$ و

$$P_\rho = P(\rho < 1) = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} P(r) \sum_{i=1}^{v_1-1} \binom{rv_2+i-1}{i} P_r^{rv_2} (1-P_r)^i.$$

البته

$$P_{\rho|r} = P(\rho < 1|r) = 1 - \sum_{i=1}^{v_1-1} \binom{rv_2+i-1}{i} P_r^{rv_2} (1-P_r)^i. \quad (2)$$

همچنین توزیع تعداد مشتریان موجود در سیستم در حالت پایا با توجه به آئن [15] عبارت است از

$$P_n = (1-\rho) \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{\tau^{n-i-1}}{(1-\tau)^{ri}} \left[\binom{ri}{n-i} \tau + \binom{ri}{n-i-1} \right], n \geq 0, \quad (3)$$

که در آن $\tau = \rho/(\rho+r)$ است.

اکنون برای محاسبه متوسط تعداد مشتری های موجود در صف (L_q) و در سیستم (L_s) به صورت زیر عمل می کنیم.

اگر $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند، طوری که X_j تعداد مشتری های وارد شده به سیستم تا سرویس j th باشد، آنگاه با استفاده سرینیواس و همکاران [16] تابع احتمال X_j s به صورت

$$P(X=x) = \binom{x+r-1}{r} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r\mu} \right)^x \left(\frac{r\mu}{\lambda+r\mu} \right)^r, x=0,1,2,\dots,$$

است که با فرض $p = \frac{r\mu}{\lambda+r\mu}$ دارای توزیع دو جمله ای منفی $NB(r, p)$ می شود. اکنون بعضی از معیارهای ارزیابی این سیستم صف بندی مانند متوسط تعداد متقاضیان در سیستم و صف و متوسط مدت زمان انتظار در سیستم و صف متقاضیان به دست آورده می شود. با کمی محاسبات جبری

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}, L_q = \frac{r^r - (1-\rho)(r+\rho)^r}{(r+\rho)^r}, \quad (4)$$

محاسبه می شوند. همچنین با استفاده از فرمول های لیتل متوسط مدت زمان انتظار در صف و سیستم هر مشتری به صورت

$$W_q = \frac{r^r - (1-\rho)(r+\rho)^r}{\lambda(r+\rho)^r}, W_s = \frac{1}{\mu}, \quad (5)$$

به دست می آیند.

همچنین در این مقاله زمان توقف سیستم T یعنی تا زمانی که سیستم فعال است، در نظر گرفته می شود. با فرض $A(T)$ به عنوان تعداد مشتری های وارد شده به سیستم و $B(T)$ تعداد مشتری های سرویس شده و $\gamma(T)$ کل اوقات سپری شده سرویس دهنده تا زمان T ، سینگ و اچاریا [17] چهار حالت برای T در نظر گرفته که عبارت اند از

۱. اگر سیستم تا زمان مشخص t فعال باشد، واضح است که $T = t$.

۲. اگر سیستم تا موقعی کار کند که d متقاضی سرویس شود یعنی $B(T) = d$ ، در این حالت

$$T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^d V_i.$$

۳. اگر سیستم تا موقعی کار کند که m مشتری به سیستم وارد شده باشد یعنی $A(T) = m$ ، در این حالت

$$T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^m U_i.$$

۴. اگر سیستم تا موقعی کار کند که n مشتری در سیستم باشد یعنی $A(T) + B(T) = n$ ، در این T یک متغیر تصادفی هست.

۳- مفاهیم اساسی

در این بخش تابع هزینه، متوسط درجه رضایت مشتری، شاخص ارزیابی عملکرد سیستم (ORS) معرفی و نحوه بهینه‌سازی خانواده مدل‌های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ توضیح داده می‌شود.

۳-۱- تابع هزینه

در هر سیستم صف‌بندی، هدف کاهش طول صف و زمان انتظار متقاضی و افزایش رضایت مشتری است. وقت مشتری از نظر اجتماعی-اقتصادی ارزش دارد و اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. به‌طورکلی در یک سیستم صف‌بندی امید ریاضی کل هزینه‌ها در واحد زمان معیاری برای ارزیابی سیستم هست که هزینه‌ها بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این مقاله به دلیل مهم بودن زمان انتظار مشتری، تابع هزینه به صورت

$$C(r) = C_1 L_q + C_2 (L_s - L_q). \quad (۶)$$

پیشنهاد می‌شود که در آن

۱. $C_1 L_q$ هزینه اتلاف وقت مشتری‌ها در صف تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر مشتری در صف C_1 در متوسط تعداد مشتری‌ها در صف یعنی L_q است.

۲. $C_2 (L_s - L_q)$ هزینه اتلاف وقت مشتری‌ها در هنگام دریافت خدمت تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر مشتری در حال دریافت خدمت C_2 در متوسط تعداد مشتری‌ها در حال دریافت خدمت یعنی $C_2 (L_s - L_q)$ است. بنابراین با توجه به رابطه (۴) و رابطه (۶) به صورت

$$C(r) = \frac{(C_1 - C_2)r^r + (C_1\rho + C_2 - C_1)(r + \rho)^r}{(r + \rho)^r}. \quad (۷)$$

نوشته می‌شود.

۳-۲- متوسط درجه رضایت مشتری

روشی توسط پرادو و لفانته [18] برای محاسبه درجه رضایت مشتری با مشاهده طول صف در لحظه ورود به سیستم ارایه شد. اگر مشتری در لحظه ورودش با صف با طول‌های کوتاه، متوسط و بلند روبرو شود، درجه رضایت آن به ترتیب بالا (a_1) متوسط (a_2) و پایین (a_3) خواهد بود ($a_1 \geq a_2 \geq a_3$). صف‌های اشاره‌شده به دلیل نسبی بودن اصطلاحات کوتاه، متوسط و بلند توسط آن‌ها به صورت مجموعه‌های فازی \bar{A} (صف کوتاه)، \bar{B} (صف متوسط) و \bar{C} (صف بلند) به صورت‌های

$$\bar{A} = \{(0, \mu_{\bar{A}}(0)), (1, \mu_{\bar{A}}(1)), \dots, (n, \mu_{\bar{A}}(n))\}.$$

$$\bar{B} = \{(0, \mu_{\bar{B}}(0)), (1, \mu_{\bar{B}}(1)), \dots, (n, \mu_{\bar{B}}(n))\}.$$

$$\bar{C} = \{(0, \mu_{\bar{C}}(0)), (1, \mu_{\bar{C}}(1)), \dots, (n, \mu_{\bar{C}}(n))\}.$$

در نظر گرفته شدند که $\mu_{\bar{A}}$ ، $\mu_{\bar{B}}$ و $\mu_{\bar{C}}$ به ترتیب مجموعه فازی‌های \bar{A} و \bar{B} و \bar{C} هستند. با توجه به دابویس [19]

$$\mu_{\bar{A}}(i) + \mu_{\bar{B}}(i) + \mu_{\bar{C}}(i) = 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

البته همچنین $\mu_{\bar{A}}(i)$ درجه عضویت مجموعه فازی \bar{A} وقتی که i مشتری در صف است را نشان می‌دهد.

اگر (Ω, F, P) یک فضای احتمال باشد به طوری که Ω فضای نمونه، F یک سیگما جبر روی Ω و P نیز یک اندازه احتمال در نظر گرفته شوند، آنگاه مجموعه فازی \tilde{A} در Ω یک پیشامد فازی نامیده می شود.

تعریف ۲ ([20]) - اگر به ازای هر $\omega \in \Omega$ ، $\mu_{\tilde{A}}(\omega)$ تابع عضویت پیشامد فازی \tilde{A} باشد، آنگاه تابع احتمال \tilde{A} به صورت

$$P(\tilde{A}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_{\tilde{A}}(\omega) P_{\omega}, \mu_{\tilde{A}}(\omega): \Omega \rightarrow [0,1],$$

تعریف می شود.

بنابراین، با توجه به **تعریف ۲**، احتمال روبرو شدن یک مشتری در حال وارد شدن به سیستم با صف به طول های کوتاه، متوسط و بلند به صورت

$$\pi(\tilde{A}) = \sum_{i=0}^n \mu_{\tilde{A}}(i) P_i, \pi(\tilde{B}) = \sum_{i=0}^n \mu_{\tilde{B}}(i) P_i, \pi(\tilde{C}) = \sum_{i=0}^n \mu_{\tilde{C}}(i) P_i, \quad (8)$$

هستند؛ بنابراین، متوسط درجه رضایت مشتری ۱ به صورت

$$ADCS = a_1 \pi(\tilde{A}) + a_2 \pi(\tilde{B}) + a_3 \pi(\tilde{C}), \quad (9)$$

تعریف می شود.

۳-۳- بهینه سازی در خانواده مدل های $\{M/E_r/1, r \in N\}$

در هر سیستم صف بندی حالت پایایی ویژگی مهمی است که تلاش می شود شرایطی فراهم گردد تا سیستم در وضعیت پایا قرار گیرد. از طرفی در دنیای امروز هزینه به عنوان یکی از مهم ترین عوامل تصمیم گیری به شمار می آید که بهینه کردن آن نقش مهمی در عملکرد مطلوب سیستم های صف بندی دارد. از طرفی افزایش میزان رضایت مشتری از سیستم نیز بسیار حایز اهمیت است؛ بنابراین، سیستمی مدنظر است که هزینه آن کمترین مقدار و احتمال پایایی آن و میزان رضایت مشتری، بیشترین مقدار را داشته باشد.

بنابراین، برای رسیدن به این مهم ابتدا از رابطه (۱) مقدار $E(\rho | \rho < 1)$ محاسبه شده و به عنوان مقداری برای ρ در نظر گرفته می شود. با استفاده از این مقدار ρ به ازای rS مختلف مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم و متوسط درجه رضایت مشتری محاسبه و سپس این مقادیر نرمال سازی می شوند. برای نرمال سازی هزینه، کوچک ترین مقدار هزینه بر هر یک از مقادیر آن و برای نرمال سازی احتمال پایایی و متوسط درجه رضایت مشتری، هر یک از مقادیر آن ها بر بزرگ ترین مقدارشان تقسیم می شوند. مقادیر نرمال شده هزینه با نماد C_N ، مقادیر نرمال شده احتمال پایایی با نماد P_N و مقادیر نرمال شده متوسط درجه رضایت مشتری با نماد A_N نشان داده می شود. برای تعیین سیستم بهینه، با در نظر گرفتن هر سه معیار هزینه سیستم نرمال شده، احتمال پایایی نرمال شده و متوسط درجه رضایت مشتری نرمال شده، شاخصی جدید به عنوان نرخ کارایی سیستم ۱ به صورت

$$ORS = w_1 C_N + w_2 P_N + w_3 A_N, w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad (10)$$

پیشنهاد می شود که w_1 ، w_2 و w_3 به ترتیب وزن معیارهای هزینه نرمال شده، احتمال پایایی نرمال شده و متوسط درجه رضایت مشتری نرمال شده هستند. شاخص تصمیم گیری ORS با هر سه معیار نرمال شده فوق ارتباط مستقیم دارد، بدین صورت که هر چقدر هزینه سیستم پایین تر و احتمال پایایی سیستم و متوسط درجه رضایت مشتری بالاتر باشد، ORS مقدار بالاتری می شود؛ بنابراین، مقداری از r که بالاترین مقدار ORS را دارد به عنوان r_{opt} انتخاب شده و سیستم مربوط به آن سیستم بهینه نامیده می شود

۴- تجزیه و تحلیل عددی

در این بخش برای خانواده مدل های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ مدل بهینه تعیین می شود؛ بنابراین، برای رسیدن به این هدف مراحل زیر طی می شود.

۱. با استفاده از رابطه (۱) و به ازای $v_1 = 12, v_2 = 1, a = 4, b = 7, \theta = 5$ مقدار $E(\rho | \rho < 1) = 0.498$ به دست آورده می شود که به عنوان مقدار ρ در نظر گرفته می شود.

۲. بدن آن که به کلیت مساله خللی وارد شود فرض می شود تا وقتی که تعداد مشتری های موجود در سیستم ۱۰ است، سیستم فعال باشد؛ بنابراین، به ازای $\rho = 0.498$ و به ازای rS مختلف، با استفاده از رابطه (۳) احتمال تعداد مشتری های موجود در سیستم به ازای $n = 0, 1, \dots, 10$ به دست آورده می شود که در جدول ۱ ثبت شده است.

با فرض

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \{(0,0.6), (1,0.5), (2,0.7), (3,0.8), (4,0.9), (5,0.2), (6,0), (7,0.4), \\ &\quad (8,0.8), (9,0.4), (10,0), \\ \vec{B} &= \{(0,0.3), (1,0.3), (2,0.2), (3,0.1), (4,0.1), (5,0.1), (6,1), (7,0.5), \\ &\quad (8,0.1), (9,0.5), (10,0.2), \\ \vec{C} &= \{(0,0.1), (1,0.2), (2,0.1), (3,0.1), (4,0.1), (5,0.1), (6,0), (7,0.1), \\ &\quad (8,0.1), (9,0.1), (10,0.8), \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۸) و با استفاده از جدول ۱، احتمال مجموعه های فازی \vec{A} و \vec{B} و \vec{C} به ازای rS مختلف محاسبه شده که در جدول ۲ ثبت شده است.

۳. به ازای $\rho = 0.498, C_1 = 350, C_2 = 300$ و با استفاده از رابطه (۷) مقدار تابع هزینه، با استفاده از رابطه (۲) احتمال پایایی، با فرض $a_1 = 1$ ، $a_2 = 0.65$ و $a_3 = 0.45$ با استفاده از جدول ۲ و رابطه (۹) متوسط درجه رضایت مشتری و با فرض $w_1 = 0.6, w_2 = 0.3, w_3 = 0.1$ و به کمک رابطه (۱۰) شاخص ORS به ازای rS مختلف محاسبه شده و در جدول ۳ ثبت شده اند.

جدول ۱- احتمال تعداد مشتری های موجود در سیستم تا $n = 10$ به ازای rS مختلف.

Table 1- Probability of the number of customers in the system up to $n=10$ for different r .

n	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	r = 7	r = 8
0	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020	0.5020
1	0.7519	0.7831	0.7958	0.8027	0.8070	0.8099	0.8121	0.8138
2	0.1245	0.1263	0.1258	0.1253	0.1248	0.1245	0.1242	0.1239
3	0.1036	0.0533	0.0489	0.0464	0.0448	0.0436	0.0429	0.0422
4	0.0129	0.0199	0.0184	0.0166	0.0154	0.0146	0.0141	0.0137
5	0.0084	0.0111	0.0069	0.0058	0.0052	0.0048	0.0046	0.0044
6	0.0034	0.0036	0.0025	0.0021	0.0017	0.0016	0.0015	0.0014
4	0.0029	0.0014	0.0009	0.0007	0.0006	0.0005	0.00047	0.00044
8	0.0022	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.00017	0.00015	0.00014
9	0.0012	0.0002	0.0001	0.00008	0.00006	0.000057	0.000049	0.000045
10	0.0010	0.00009	0.00004	0.00003	0.00002	0.000018	0.000016	0.000014

جدول ۲- احتمال مجموعه های فازی \vec{A} و \vec{B} و \vec{C} برای rS مختلف.

Table 2- Probability of fuzzy sets \vec{A} , \vec{B} , and \vec{C} for different r .

r = 8	r = 7	r = 6	r = 5	r = 4	r = 3	r = 2	r = 1	$\pi(\cdot)$
0.8421	0.8424	0.8428	0.8432	0.8440	0.8449	0.8451	0.8631	$\pi(\vec{A})$
0.4285	0.4284	0.4281	0.4278	0.4277	0.4273	0.4284	0.4229	$\pi(\vec{B})$
0.2315	0.2313	0.2310	0.2307	0.2230	0.2295	0.2282	0.2269	$\pi(\vec{C})$

جدول ۳- مقادیر معیارهای مربوط به تعیین مدل بهینه برای خانواده مدل های $\{M/E_r/1, r \in N\}$.

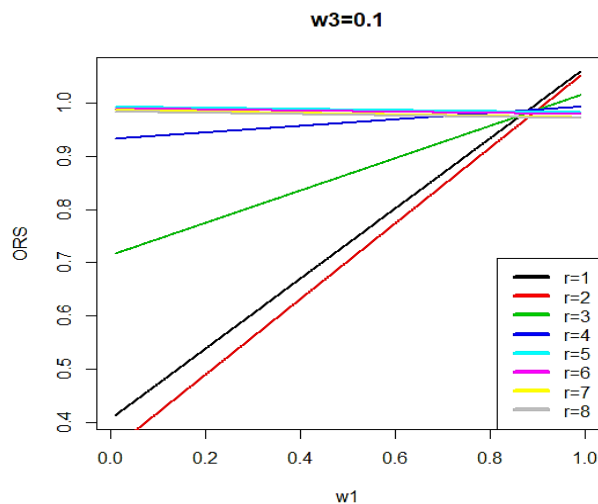
Table 3- Values of criteria related to determining the optimal model for the family of models $\{M/E_r/1, r \in N\}$.

ORS	A_N	P_N	C_N	ADCS	$P_{\rho r}$	$C(r)$	r
0.8019	1	0.34030	0.9994	1.2400	0.3403	157.7	1
0.7748	0.9865	0.27510	0.9949	1.2233	0.2751	156.4	2
0.8974	0.9862	0.68211	0.9987	1.2229	0.6821	155.8	3
0.9703	0.9858	0.92451	1	1.2224	0.9245	155.6	4
0.9877	0.9880	0.99861	0.9407	1.2251	0.9886	165.4	5
0.9753	0.9879	0.99881	0.9084	1.2250	0.9988	171.3	6
0.9665	0.9858	0.99992	0.8683	1.2249	0.99991	179.2	7
0.9611	0.9877	1	0.8361	1.2248	0.99999	186.1	8

با توجه به مقادیر ORS در جدول ۳ نتیجه گرفته می شود که مدل $M/E_5/1$ در خانواده مدل های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ مدل بهینه است. البته به ازای w_1 و w_2 و w_3 مختلف، نتایج متفاوت به دست آید. اکنون با در نظر گرفتن $w_3 = 0.1$ و بازنویسی رابطه (۱۰) به صورت

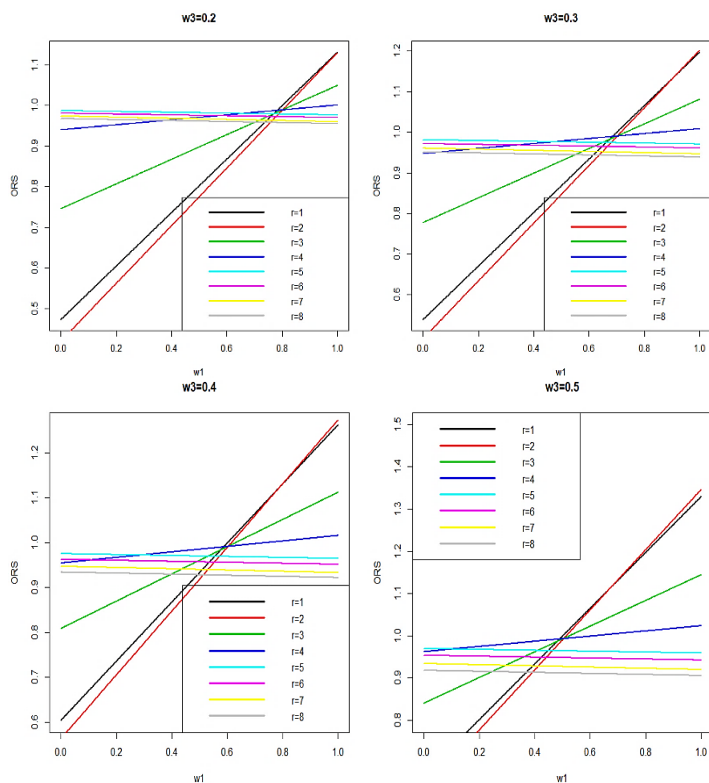
$$ORS = w_1 C_N + (1 - w_1 - w_3) P_N + w_3 A_N.$$

نمودار ORS بر حسب w_1 رسم شده است (شکل ۲) که نشان می دهد وقتی که $0 < w_1 \leq 0.9$ است، مدل $M/E_5/1$ بهتر است که با نتیجه گرفته شده در جدول ۳ یکسان است.

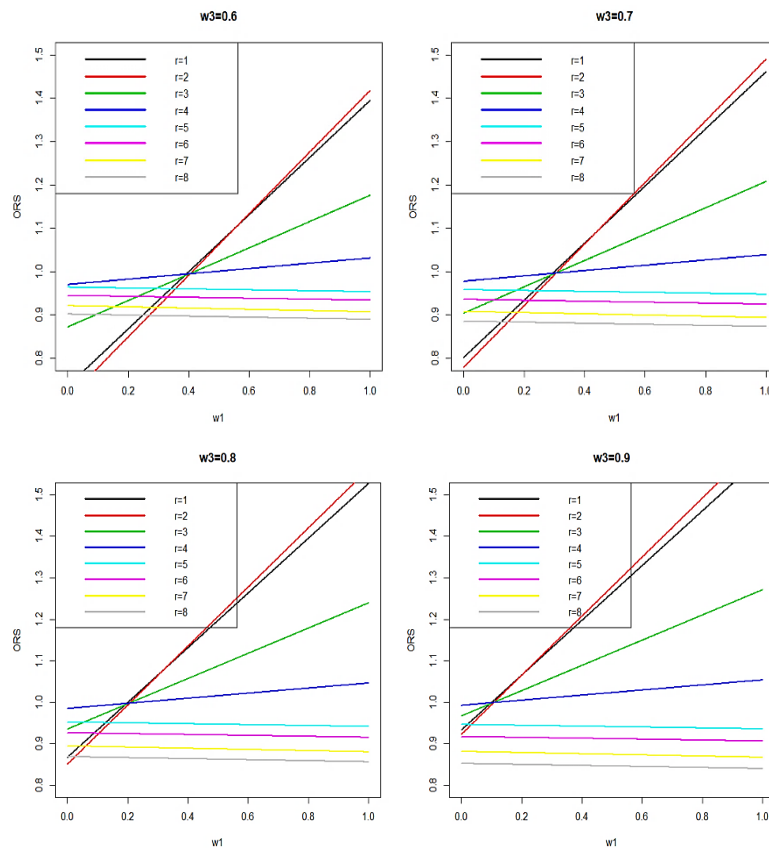


شکل ۲- نمودار شاخص ORS بر حسب w_1 به ازای $w_3 = 0.1$.
Figure 2- ORS index graph in terms of w_1 for $w_3=0.1$.

اکنون به ازای w_3 th متفاوت نمودار ORS بر حسب w_1 رسم شده است.



شکل ۳- نمودارهای شاخص ORS بر حسب w_1 به ازای $w_3 = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.
Figure 3- ORS index graphs in terms of w_1 for $w_3=0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



شکل ۴- نمودارهای ORS برحسب w_1 برای $w_3 = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

Figure 4- ORS plots in terms of w_1 for $w_3=0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

با توجه به نمودارهای موجود در شکل های ۲ تا ۴ و تحت شرط روی w_1 نتایج برای انتخاب مدل بهینه در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۴- نتایج انتخاب مدل بهینه به ازای w_3 th مختلف.

Table 4- Results of selecting the optimal model for different w_3 .

$M/E_1 / 1$ مدل $0.9 < w_1 < 1$	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.9$	$M/E_5 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.9$	$w_3 = 0.1$		
$M/E_1 / 1$ مدل $0.9 < w_1 < 1$	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.9$	$M/E_5 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.9$	$w_3 = 0.2$		
$M/E_1 / 1$ مدل $0.7 < w_1 < 1$	و به ازای $0.4 < w_1 \leq 0.7$	$M/E_4 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.4$	$M/E_5 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.3$	$w_3 = 0.3$
$M/E_2 / 1$ مدل $0.7 < w_1 < 1$	و به ازای $0.3 < w_1 \leq 0.7$	$M/E_4 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.3$	$M/E_5 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$w_3 = 0.4$
$M/E_2 / 1$ مدل $0.5 < w_1 < 1$	و به ازای $0.1 < w_1 \leq 0.5$	$M/E_4 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$M/E_5 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.4$	$w_3 = 0.5$
$M/E_2 / 1$ مدل $0.4 < w_1 < 1$	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.4$	$M/E_4 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.3$	$M/E_5 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.2$	$w_3 = 0.6$
$M/E_2 / 1$ مدل $0.3 < w_1 < 1$	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.3$	$M/E_4 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.2$	$M/E_5 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$w_3 = 0.7$
$M/E_2 / 1$ مدل $0.2 < w_1 < 1$	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.2$	$M/E_4 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$M/E_5 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$w_3 = 0.8$
$M/E_2 / 1$ مدل $0.1 < w_1 < 1$	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$M/E_4 / 1$ مدل	به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$M/E_5 / 1$ مدل	و به ازای $0 < w_1 \leq 0.1$	$w_3 = 0.9$

۵- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله برای خانواده مدل های $\{M/E_r/1, r \in N\}$ با زمان های بین ورود دارای توزیع نمایی و با زمان های سرویس دارای توزیع ارلانگ، تابع هزینه و معیاری به نام متوسط درجه رضایت مشتری تعریف و شاخصی وزنی به نام شاخص ORS برحسب تابع هزینه، احتمال پایایی و متوسط درجه رضایت مشتری برای ارزیابی عملکرد سیستم معرفی شد، تا به کمک آن مدل بهینه تعیین شود. مدل بهینه، مدلی است که به ازای RS مختلف دارای شاخص ORS بزرگتری باشد. در پایان نیز به کمک تحلیل عددی به ازای مقادیر مختلف وزن های شاخص ORS ، مدل بهینه تعیین گردید که از روش نموداری برای تعیین مدل بهینه استفاده شد. همچنین برای یک مجموعه وزن های خاص نیز هم از روش نموداری و هم از روش شبیه سازی مونت کارلو استفاده شد و مدل $M/E_5/1$ به عنوان مدل بهینه تعیین شد.

تقدیر و قدردانی

نویسندگان از دقت نظر هیات تحریریه و داوران گرامی و از رهنمودهای ارزشمند آنان که نقش بسزایی در ارتقای کیفیت مقاله داشت، سپاسگزارند.

منابع مالی

این پژوهش هیچ کمک‌هزینه خاصی از هیچ موسسه سرمایه‌گذار در بخش عمومی تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ نوع تعارض منافی وجود ندارد.

منابع

- [1] Gupta, P. L. (1982). Structural properties and estimation in $M|E_k|1$ queue. *Communications in statistics-theory and methods*, 11(6), 711–719. <https://doi.org/10.1080/03610928208828264>
- [2] Fischer, M. J. (1974). The waiting time in the $E_k/M/1$ queueing system. *Operations research*, 22(4), 898–902. <https://doi.org/10.1287/opre.22.4.898>
- [3] Wiper, M. P. (1998). Bayesian analysis of $E_r/M/1$ and $E_r/M/c$ queues. *Journal of statistical planning and inference*, 69(1), 65–79. [https://doi.org/10.1016/S0378-3758\(97\)00124-9](https://doi.org/10.1016/S0378-3758(97)00124-9)
- [4] Insua, D. R., Wiper, M., & Ruggeri, F. (1998). Bayesian analysis of $M/E_r/1$ and $M/H_k/1$ queues. *Queueing systems*, 30(3), 289–308. <https://doi.org/10.1023/A:1019173206509>
- [5] Harishchandra, K., & Subba Rao, S. (1988). A note on statistical inference about the traffic intensity parameter in $M||1$ queue. *Sankhyā: the Indian journal of statistics, series b*, 50(1), 144–148. <https://www.jstor.org/stable/25052531>
- [6] Jain, M., & Dhyani, I. (2001). Control policy for $M/E_k/1$ queueing system. *Journal of statistics and management systems*, 4(1), 73–82. <https://doi.org/10.1080/09720510.2001.10701028>
- [7] Chowdhury, S., & Maiti, S. S. (2014). Bayesian estimation of traffic intensity in an $M/E_r/1$ queueing model. *Research & reviews: Journal of statistics*, 1, 99–106. https://www.researchgate.net/profile/Sudhansu-Maiti/publication/297849479_Bayesian_Estimation_of_Traffic_Intensity_in_an_MEr1_Queueing_Model/links/56e3d71108ae98445c1e7a90/Bayesian-Estimation-of-Traffic-Intensity-in-an-M-Er-1-Queueing-Model.pdf
- [8] Jose, J. K., & Manoharan, M. (2014). Bayesian estimation of rate parameters of queueing models. *Journal of probability and statistical science*, 12(1), 69–76. https://www.researchgate.net/profile/Joby-Jose/publication/338966261_Bayesian_Estimation_of_Rate_Parameters_of_Queueing_Models/links/5e352cb2458515072d740c3b/Bayesian-Estimation-of-Rate-Parameters-of-Queueing-Models.pdf
- [9] Vaidyanathan, V. S., & Chandrasekhar, P. (2018). Parametric estimation of an $M|E_r|1$ queue. *Opsearch*, 55(3), 628–641. <https://doi.org/10.1007/s12597-018-0342-0>
- [10] Deepthi, V., & Jose, J. K. (2020). Bayesian estimation of $M/E_k/1$ queueing model using bivariate prior. *American journal of mathematical and management sciences*, 40(1), 88–105. <https://doi.org/10.1080/01966324.2020.1835589>
- [11] Makhdoom, I., & Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2024). Bayesian estimation in the $M/M/1$ queueing model under a Type II censoring scheme based on fuzzy data. *Journal of statistical modelling: theory and applications*, 5(1), 131–143. [10.22034/jsmta.2025.21733.1144](https://doi.org/10.22034/jsmta.2025.21733.1144)
- [12] Jain, A., & Raychaudhuri, C. (2023). Cost optimization in multi server queueing model with balking. In *International conference on advances in applied and computational mathematics*. AIP Publishing LLC. <https://doi.org/10.1063/5.0139432>
- [13] Makhdoom, I. (2024). A new optimum statistical estimation of the traffic intensity parameter for the $M/M/1/K$ queueing model based on fuzzy and non-fuzzy criteria. *Journal of data science and modeling*, 2(1), 163–184. https://jdscm.atu.ac.ir/article_17948_6c87b87f9c63c9d8151ab9d6b9576e0f.pdf
- [14] Wiper, M. P. (1998). Bayesian models for correlation in $M/M/1$ queues. *Journal of statistical planning and inference*, 69(1), 65–79. [https://doi.org/10.1016/S0378-3758\(97\)00124-9](https://doi.org/10.1016/S0378-3758(97)00124-9)
- [15] Allen, A. O. (2014). *Probability, statistics, and queueing theory*. Academic press. https://books.google.nl/books/about/Probability_Statistics_and_Queueing_Theo.html?id=LWniBQAAQBAJ&redir_esc=y
- [16] Srinivas, V., Subba Rao, S., & Kale, B. K. (2011). Estimation of measures in $M/M/1$ queue. *Communications in statistics-theory and methods*, 40(18), 3327–3336. <https://doi.org/10.1080/03610926.2010.498653>
- [17] Singh, S. K., & Acharya, S. K. (2019). Equivalence between Bayes and the maximum likelihood estimator in $M/M/1$ queue. *Communications in statistics-theory and methods*, 48(19), 4780–4793. <https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1481971>
- [18] Pardo, M. J., & la Fuente, D. (2008). Optimal selection of the service rate for a finite input source fuzzy queueing system. *Fuzzy sets and systems*, 159(3), 325–342. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.05.014>
- [19] Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and applications* (Vol. 144). Academic press. https://books.google.nl/books/about/Fuzzy_Sets_and_Systems.html?id=JmjfHUUtMkMC&redir_esc=y
- [20] Zadeh, L. A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of mathematical analysis and applications*, 23(2), 421–427. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(68\)90078-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90078-4)