

# شناسایی نقطه تغییر در پایش پروفایل‌های رگرسیون پواسون با روند خطی

علیرضا شرفی<sup>a</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مجید امین نیری<sup>b</sup>

دانشیار مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

امیرحسین امیری<sup>c</sup>

استادیار مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد

**چکیده** نمودارهای کنترل یکی از مهمترین ابزارهای کنترل فرآیند آماری می‌باشند که جهت کنترل میزان تغییرات مورد استفاده واقع می‌شود. در نمودار کنترل زمانی که یک انحراف با دلیل مشاهده می‌شود، پی بردن به علل اصلی تغییر در فرآیند و شناسایی زمانی که این انحراف آغاز شده، امری مهم و تأثیرگذار است که به آن نقطه تغییر گویند. در برخی از مسائل کنترل فرآیند آماری، کیفیت یک محصول یا عملکرد یک فرایند به وسیله رابطه بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود، که به آن پروفایل گویند. در بسیاری از کاربردها همچون کالیبراسیون رابطه مذکور به وسیله یک پروفایل خطی توصیف می‌شود در حالی که در موقعیت‌های دیگر مدل‌های پیچیده‌تری همچون پروفایل‌های رگرسیون پواسون مورد نیاز است. در این مقاله از روش MLE به منظور کشف نقطه تغییر در فاز ۲ پایش پروفایل‌های رگرسیون پواسون استفاده شده و عملکرد آن با استفاده از شبیه سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی** پروفایل رگرسیون پواسون، نقطه تغییر، تخمین زنده حداکثر درست‌نمایی، کنترل کیفیت آماری

## ۱- مقدمه

همکاران [۱۱] و [۱۲] پروفایل‌های چندجمله‌ای و واکر و رایت [۱۳]، ویلیامو همکاران [۱۴] و واقفی و همکاران [۱۵] پروفایل‌های غیر خطی را مورد مطالعه قرار دادند.

مطالعات فوق بر این فرض استوار است که متغیر پاسخ پیوسته (معمولاً نرمال) است. در بسیاری از کاربردهای صنعتی متغیر پاسخ به صورت گسسته (دودویی یا شمارشی) است که به منظور مطالعه آن‌ها از مدل‌های خطی تعمیم یافته استفاده می‌شود. به همکاران [۱۶] به مطالعه فاز ۱ پروفایل‌های باینری پرداخته و نمودارهای مختلفی را برای کنترل آن‌ها ارائه دادند. تخمین نقطه تغییر نیز یکی از مسائلی است که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. پیدا کردن زمان واقعی تغییر با محدود کردن دامنه جستجو به مهندس کیفیت در پیدا کردن سریع‌تر علل حالت خارج از کنترل کمک می‌نماید. مسائل تخمین نقطه تغییر بر اساس نوع شیفت ایجاد شده به تغییرات پله‌ای، یکنواخت، مونوتونیک و غیره دسته‌بندی می‌شوند. سه رویکرد اصلی که در تحقیقات گذشته برای تخمین نقطه تغییر

در اکثر کاربردهای کنترل فرآیند آماری، عملکرد یک فرآیند یا محصول را می‌توان به وسیله توزیع یک (چند) مشخصه کیفی توصیف و به وسیله نمودارهای کنترلی تک (چند) متغیره کنترل می‌شود. با این حال در بسیاری از شرایط کیفیت یک فرآیند یا محصول به وسیله رابطه‌ای بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود که آن را پروفایل می‌نامند. محققان بسیاری از جمله [۱]، [۲]، [۳] و [۴] به بررسی کاربردهای عملی پروفایل‌ها پرداختند. تاکنون تحقیقات بسیاری در زمینه پایش پروفایل‌ها در فاز ۱ و ۲ انجام شده است. هدف فاز ۱ مدل کردن عملکرد فرآیند و برآورد پارامترهای مدل در فرآیند تحت کنترل است؛ در حالی که هدف فاز ۲ کشف سریع شیفت و روند در پارامترهای مدل بر اساس نمودار کنترل طراحی شده در فاز ۱ می‌باشد. از جمله تحقیقات انجام شده در زمینه پروفایل‌های خطی ساده می‌توان به [۱]، [۵] و [۶] در فاز ۱ و [۲]، [۵] و [۷] در فاز ۲ اشاره نمود. رابطه ارائه شده در پروفایل‌ها علاوه بر خطی ساده می‌تواند مدل‌های پیچیده‌تری همچون خطی چندگانه، چند جمله‌ای، خطی تعمیم یافته و یا غیر خطی را شامل شود. جنسن و همکاران [۸]، زو و همکاران [۹] و امیری و همکاران [۱۰] پروفایل‌های خطی چندگانه، کاظم زاده و

<sup>a</sup> [alireza.sharafi@yahoo.com](mailto:alireza.sharafi@yahoo.com)

<sup>b</sup> (Corresponding author) [mjnayeri@aut.ac.ir](mailto:mjnayeri@aut.ac.ir)

<sup>c</sup> [amiri@shahed.ac.ir](mailto:amiri@shahed.ac.ir)

(۱) را می‌توان به صورت زیر ساده نمود.

$$\lambda_i = \exp(x_i^T \beta) = \exp(\eta_i) \quad (2)$$

که در این رابطه  $\eta_i = x_i^T \beta = \sum_{k=1}^p \beta_k x_{ik}$  پیشگوی خطی است. به منظور برآورد پارامترهای مدل از برآوردگر درستنمایی ماکزیمم استفاده می‌شود [۲۲]. لذا تابع درستنمایی توام  $\mathcal{Y}$  بصورت (۳) تعریف می‌شود.

$$L(\lambda, \mathcal{Y}) = \prod_{i=1}^n \left[ e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{y_i}}{y_i!} \right] \quad (3)$$

$$= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i^{y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}$$

به طوری‌که:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \text{ و } \mathcal{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \text{ با لگاریتم گرفتن از رابطه فوق داریم:}$$

$$l(\lambda, \mathcal{Y}) = - \sum_{i=1}^n \exp(x_i^T \beta) + \sum_{i=1}^n y_i (\ln(\exp(x_i^T \beta))) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!) \quad (4)$$

با مشتق گرفتن از (۴) نسبت به  $\beta$  و استفاده از روش حداقل مربعات وزنی پیشنهاد شده توسط کولاخ و نلدر [۲۳] رابطه زیر به منظور برآورد پارامترهای مدل برقرار خواهد شد.

$$\hat{\beta} = (X^T \hat{W} X)^{-1} X^T \hat{W} \mathcal{Y} \quad (5)$$

به طوری‌که:

$$\hat{W} = \text{diag}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n] \text{ و } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

تکرارهای فوق را می‌توان در فلچارت شکل ۱ نشان داد. کولاخ و نلدر [23] ثابت کردند که اگر  $n$  بزرگ باشد،  $\hat{\beta}$  دارای توزیع نرمال  $p$ -بعدی  $(\beta, (X^T \hat{W} X)^{-1})$  است.

### ۳- روش پیشنهادی

فرض کنید تعداد پارامترها در یک مدل رگرسیون پواسون برابر ۲ است ( $p = 2$ )، بنابراین تابع پیوند مسئله به صورت  $g(\lambda_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{i2}$  ساده می‌شود که در آن  $\beta_1$  عرض از مبدأ و  $\beta_2$  شیب تابع لجیت بوده و به صورت  $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$  نشان داده می‌شود. پروفایل تحت کنترلی را در نظر گرفته که مشاهدات مستقل آن از توزیع پواسون پارامترهای معلوم  $\beta = \beta_0$  پیروی می‌کند، لذا تابع احتمال این مشاهدات به صورت:

$$f(y_{ij}) = e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{y_{ij}}}{y_{ij}!} = e^{-\exp(x\beta_0)} \frac{(\exp(x\beta_0))^{y_{ij}}}{y_{ij}!}$$

توسط محققان پیشنهاد شده عبارت است از روش ماکزیمم درست نمایی، نمودار کنترل جمع تجمعی و نمودار میانگین متحرک موزون نمایی. پیگناتلو و ساموئل [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] از تخمین زننده حداکثر درستنمایی به منظور شناسایی تغییرات پله‌ای و پری و پیگناتلو [۲۰] و [۲۱] به منظور برآورد تغییرات خطی استفاده کردند. ساموئل و پیگناتلو [۱۹] و پری و پیگناتلو [۲۰] عملکرد روش‌های مختلف تخمین نقطه تغییر را در فرآیندهای پواسون و نرمال مورد مطالعه قرار داده و به این نتیجه رسیدند که روش MLE از دو روش دیگر کاراتر است.

تخمین نقطه تغییر در حوزه پروفایل‌ها نیز با مطالعاتی همراه بوده است. محمود و همکاران [۶] و زو و همکاران [۷] بر پایه آماره حداکثر درستنمایی روش‌هایی را به منظور تخمین نقطه تغییر به ترتیب در فاز ۱ و ۲ پروفایل‌های خطی ساده ارائه نمودند. کاظم زاده و همکاران [۱۱] از روشی مشابه در فاز ۱ پروفایل‌های چند جمله‌ای تحت تغییرات پله‌ای استفاده کردند. با این وجود با مرور ادبیات انجام شده، هیچ روشی به منظور برآورد زمان تغییر در پروفایل‌های رگرسیون پواسون انجام نشده است. بنابراین انگیزه اصلی این مقاله ارائه روشی به منظور برآورد نقطه تغییر در فاز ۲ پروفایل‌های رگرسیون پواسون بوده و فرض می‌شود که تغییرات ایجاد شده به صورت خطی است.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ مدل رگرسیون پواسون مطرح شده و چگونگی بدست آوردن پارامترهای آن بیان می‌شود. روش پیشنهادی در بخش ۳ ارائه شده و در بخش ۴ عملکرد این روش با استفاده از شبیه سازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش آخر نیز نتیجه گیری و پیشنهادات آتی مطرح می‌گردد.

### ۲- مدل رگرسیون پواسون

وقتی متغیر پاسخ در مسأله تنها مقادیر صحیح نامنفی  $(0, 1, 2, \dots)$  را اخذ کنند از رگرسیون پواسون استفاده می‌شود. در این الگو متغیرهای پاسخ  $y_1, y_2, \dots, y_n$  از توزیع پواسون مستقل با  $E(y_i) = \lambda_i$  و  $\text{var}(y_i) = \lambda_i$  تبعیت می‌کنند. در یک مدل رگرسیون پواسون فرض می‌شود که  $n$  آزمایش مستقل صورت می‌گیرد. در هر آزمایش  $p$  بردار متغیر مستقل  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})^T$  در نظر گرفته شده و بردار متغیر پاسخ به صورت  $y_i = 1, 2, \dots, n$  نشان داده می‌شود. تابع پیوند این مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$g(\lambda_i) = \log(\lambda_i) = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} \quad (1)$$

در این رابطه بردار پارامترهای مدل  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$  است. معمولاً  $x_{i1} \equiv 1$  بوده و  $\beta_1$  عرض از مبدأ مدل است. رابطه

در این مقاله، به منظور برآورد پارامترهای مجهول، از روش MLE استفاده شده است. با فرض وقوع تغییر در نقطه  $\tau$  تابع درستنمایی مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$l(\tau, \beta_1 | y) = \frac{1}{\prod_{j=1}^T \prod_{i=1}^n (y_i!)} \times \exp \left[ - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \exp(X\beta_0) - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n \exp(X(\beta_0 + (j-\tau)\Delta)) \right] \exp \left[ \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n y_{ij}(X\beta_0) \right] \exp \left[ \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y_{ij}(X(\beta_0 + (j-\tau)\Delta)) \right] \quad (7)$$

ماکزیمم درستنمایی  $\tau$  ( $\hat{\tau}$ ) مقداری از  $\tau$  است که تابع فوق را ماکزیمم می‌کند. با لگاریتم گرفتن از (7) داریم:

$$\begin{aligned} \ln l(\tau, \beta_1 | y) = & - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n \ln(y_{ij}!) - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n \exp(X\beta_0) \\ & - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n \exp(X(\beta_0 + (j-\tau)\Delta)) + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n y_{ij}(X\beta_0) \\ & + \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y_{ij}(X(\beta_0 + (j-\tau)\Delta)) \end{aligned} \quad (8)$$

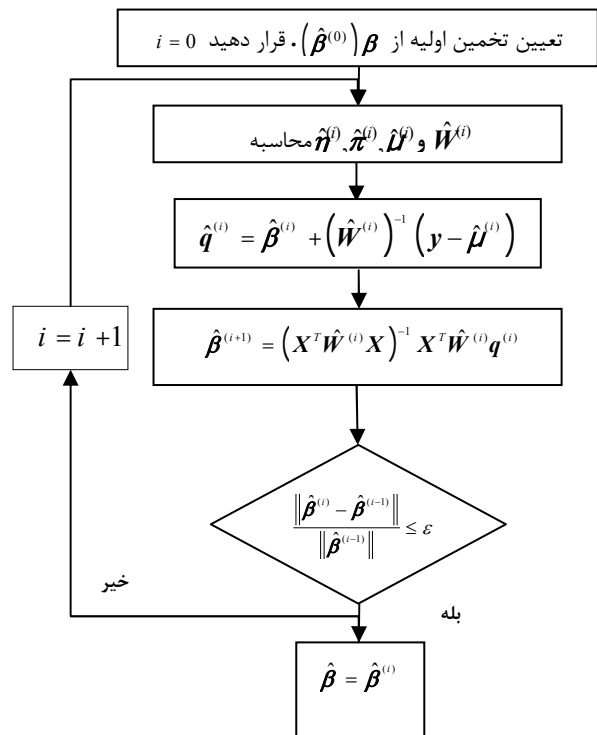
در این عبارت  $\Delta$  و  $\tau$  ناشناخته است و باید  $\Delta$  را در مقابل  $\tau$  طوری برآورد کنیم تا ماکزیمم عبارت فوق بدست آید. این تخمین‌ها را با  $\hat{\tau}$  و  $\hat{\Delta}$  نشان می‌دهیم. مشتق جزئی (8) نسبت به  $\Delta$  برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\tau, \Delta | y)}{\partial \Delta} = & - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n X(j-\tau) e^{X(\beta_0 + (j-\tau)\Delta)} \\ & + \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y_{ij} X(j-\tau) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

هیچ فرم بسته‌ای نمی‌توان برای  $\Delta$  پیدا کرد. بنابراین در این جا مشابه پری و پیگناتلو [۲۰] از روش نیوتون-رافسون به منظور تخمین ریشه معادله بهره‌گیری می‌شود. بر این اساس  $\hat{\Delta}$  را مقدار برآورد شده پارامتر  $\Delta$  با روش نیوتون-رافسون می‌نامیم. با بدست آوردن  $\hat{\Delta}$  و جایگزین کردن آن در (8) و محاسبه مقدار تابع برای تمام نقاط بالقوه تغییر، می‌توان نقطه تغییر  $\tau$  مشخص کرد. براین اساس حداکثر درستنمایی نقطه تغییر  $\tau$  مقداری است که رابطه (۱۰) را ماکزیمم کند.

می‌باشد که در آن  $y_{ij}$  مقدار پاسخ نامین متغیر پیشگو در  $j$  پروفایل است. پس از مدتی و در پروفایل نامعلوم  $\tau$ ، فرآیند از حالت تحت کنترل خارج شده و بردار  $\beta$  آن به صورت زیر تغییر می‌کند و تا زمانی که نمودار کنترل هشدار می‌بندی بر وقوع حالت خارج از کنترل صادر نکرده است، در این وضعیت باقی می‌ماند.

$\beta_1 = \beta_0 + (j-\tau)\Delta \quad j = \tau+1, \tau+2, \dots, T \quad (6)$   
در این رابطه  $\Delta = (\delta_1\sigma_1, \delta_2\sigma_2)^T$ ،  $T$  اولین نمونه خارج از کنترل و مقادیر  $\delta_1, \delta_2$  ثابت هستند. به عبارت دیگر، برای پروفایل‌های  $j=1, 2, \dots, \tau$  مقدار پارامتر فرآیند برابر با مقدار تحت کنترل  $\beta_0$  بوده و برای پروفایل‌های  $j = \tau+1, \tau+2, \dots, T$  شیب  $\Delta$  افزایش می‌یابد. مقدار تغییر در پارامتر  $\beta$  بر پایه پارامتر غیر مرکزی  $n_{cp}$  بیان می‌شود که در آن  $n_{cp} = \Delta^T S^{-1} \Delta$  است. پارامترهای مجهول فرآیند  $\tau$  و  $\Delta$  است که به ترتیب معرف شماره آخرین پروفایل در حالت کنترل و شیب تغییرات ایجاد شده در بردار پارامتر مدل در حالت خارج از کنترل است.



شکل ۱: الگوریتم مراحل محاسبه پارامترهای رگرسیون پواسون

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \log(1) & \log(2) & \dots & \log(\theta) \end{pmatrix}^T.$$

در حالت تحت کنترل بردار پارامتر مدل برابر  $\beta_0 = (1, 1.5)^T$  در نظر گرفته می‌شود که بر طبق داده های بدست آمده از فاز ۱ و استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش ۲ حاصل شده است. حد بالای کنترل نمودار  $T_1^2$  برابر است با  $\chi_{2,0.005}^2 = 10.59$ .

پس از مدتی و در پروفایل نامعلوم  $\tau$ ، فرآیند از حالت تحت کنترل خارج شده و بردار  $\beta$  آن به صورت  $\Delta$   $\beta_1 = \beta_0 + (j - \tau)\Delta$  تغییر می کند، به گونه‌ای که مقدار شیب نامعلومی است که در پارامتر  $\beta$  به وجود آمده است. با وقوع اولین نمونه خارج از کنترل، تولید داده متوقف شده و نقطه تغییر فرآیند تخمین زده می‌شود. اندازه تغییر ایجاد شده به مقادیر  $\delta_1$  و  $\delta_2$  بستگی دارد و هر چه این مقدار بیشتر باشد، تغییر ایجاد شده بزرگ‌تر است.

نقطه تغییر فرآیند در  $\tau = 50$  شبیه سازی می‌شود. برای پروفایل‌های  $j = 1, 2, \dots, 50$  مشاهدات مستقل از یک توزیع پواسون با پارامتر تحت کنترل  $\beta_0 = (1, 1.5)^T$  تولید شده و از پروفایل ۱۵۱ام، فرآیند از حالت تحت کنترل خارج می‌شود و

جدول ۱: میانگین اولین نمونه خارج کنترل، مقدار تخمینی نقطه تغییر  $\tau = 50$  و خطای استاندارد آن برای مقادیر مختلف تغییر در نمودار کنترل با ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی.

$ncp$	$(\delta_1, \delta_2)$	$E(T)$	$\bar{\tau}$	$se(\hat{\tau})$
0.002	(0,0.01)	80.12	57.26	5.87
0.009	(0.01,0.01)	70.64	56.48	5.13
0.020	(0.01,0.02)	65.3	54.86	4.64
0.037	(0.02,0.02)	61.32	53.33	3.91
0.037	(0.03,0.02)	61.29	53.28	3.84
0.058	(0.05,0)	60.2	52.63	3.12
0.083	(0.03,0.03)	59.36	52.11	2.99
0.113	(0.03,0.04)	58.34	50.74	2.14
0.148	(0.04,0.04)	57.46	50.51	1.68
0.187	(0.03,0.06)	56.3	50.32	1.51
0.231	(0.05,0.05)	55.94	50.16	1.21
0.233	(0.1,0)	55.68	50.11	1.23
0.332	(0.06,0.06)	55.33	50.08	0.94
0.521	(0.05,0.1)	54.7	49.96	0.52
0.561	(0.09,0.08)	53.69	49.83	0.46
0.925	(0.1,0.1)	53.24	48.31	0.41

$$\begin{aligned} \hat{\tau} = \arg \max [ & - \sum_{j=\tau+1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \exp(X\beta_0) \\ & - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n \exp(X(\beta_0 + (j - \tau)\Delta)) + \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n y_{ij}(X\beta_0) \\ & + \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n y_{ij}(X(\beta_0 + (j - \tau)\Delta)) \\ & - \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n \ln(y_{ij}!) ] \end{aligned} \quad (10)$$

در این رابطه  $\hat{\tau}$  بیانگر تخمین زنده ماکزیمم درست‌نمایی آخرین پروفایلی است که در حالت کنترل قرار دارد. این تخمین زنده می‌تواند هر زمان که نمودارهای کنترل هشدار مبنی بر خارج کنترل بودن فرآیند صادر کنند، مورد استفاده قرار گیرد.

یه و همکاران [۱۶] به منظور پایش پروفایل‌های لجستیک در فاز ۱، که نوعی از پروفایل‌های خانواده نمایی است، چندین نمودار کنترل  $T^2$  ارائه دادند. نمودار  $T^2$  مورد استفاده برای نمونه  $Z$ ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_j^2 = (\hat{\beta}_j - \beta)^T S^{-1} (\hat{\beta}_j - \beta) \quad (11)$$

$\hat{\beta}_j$  بردار پارامترهای مدل برای پروفایل  $Z$ ام و  $S$  ماتریس کوواریانس  $\hat{\beta}_j$  در حالت تحت کنترل می‌باشد. هر یک از نمودارهای  $T^2$  ارائه شده آن‌ها روش مختلفی برای تخمین  $\beta$  و  $S$  ارائه می‌دهند. آن‌ها نشان دادند که نمودار  $T_1^2$  که ماتریس کواریانس را با تغییرات مربوط به درون پروفایل‌ها بدست می‌آورد، عملکرد بهتری در تشخیص نقطه تغییر دارد.

با توجه به مطالعات صورت گرفته توسط یه و همکاران [۱۶] می‌توانیم از نمودار  $T_1^2$  در فاز دوم پایش پروفایل‌های پواسون بهره گیری کنیم. حد بالای نمودار کنترل در فاز ۲ را برابر  $\chi_{2,\alpha}^2$  در نظر می‌گیریم که بیانگر احتمال وقوع  $\alpha$  درصد نقاط خارج از کنترل در نمودار کای-۲ با ۲ درجه آزادی است. ماتریس کواریانس این نمودار در فاز ۲ را می‌توان به کمک (۱۲) نشان داد.

$$\Sigma = (X^T W X)^{-1} \quad (12)$$

#### ۴- ارزیابی عملکرد تخمین زنده پیشنهادی

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو به ارزیابی عملکرد تخمین زنده پیشنهادی می‌پردازیم. به این منظور با در نظر گرفتن ۹ آزمایش برای هر پروفایل،  $n = 9$ ، ماتریس  $X$  برابر است با:

جدول مشابه نتایج بدست آمده از جدول ۱ می‌باشد. برای مثال اگر  $ncp = 0.058$  باشد، تخمین زنده پیشنهادی در ۶۰ درصد موارد نقطه تغییر را با فاصله حداکثر ۱ نمونه از مقدار واقعی آن برآورد می‌کند. همچنین در این حالت، در ۴۴ درصد موارد برآورد کننده پیشنهادی، نقطه تغییر را دقیقاً همان مقدار واقعی آن برآورد می‌کند. در این جدول مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه تغییر، فاصله نقطه برآورد شده توسط الگوریتم از نقطه واقعی تغییر کاهش می‌یابد.

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش MLE به منظور تخمین نقطه تغییرات یکنواخت در فاز ۲ پروفایل‌های رگرسیون پواسون استفاده شده و عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از شبیه سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که این تخمین زنده عملکرد مناسبی در تشخیص اندازه‌های مختلف تغییرات در فرآیند مورد مطالعه دارد.

توسعه این روش برای سایر توابع خانواده نمایی همچون لجستیک، گاما و بتا و نیز بررسی انواع دیگر شیفت‌های ایجاد شده در فرآیند شامل تغییرات پله‌ای، ایزوتونیک و ... به عنوان مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود.

تولید مشاهدات مستقل با پارامترهای تغییر یافته ادامه می‌یابد تا زمانی که نمودار کنترل  $T_I^2$  هشدار را مبنی بر وقوع حالت خارج از کنترل صادر کند. شماره این پروفایل  $T$  در نظر گرفته می‌شود. سپس تولید مشاهدات متوقف شده و برای تمام پروفایل‌ها،  $j = 1, 2, \dots, T$  تخمین زنده نقطه تغییر (۱۰) مورد استفاده قرار می‌گیرد تا نقطه تغییر را تخمین بزند. این رویه برای هر یک از مقادیر  $\Delta$ ، ۱۰۰۰۰ بار تکرار می‌شود و میانگین مربع خطای  $\hat{\tau}$  محاسبه می‌شود.

نتایج حاصل از این شبیه سازی در جدول ۱ و جدول ۲ آمده است. جدول ۱ طول مورد انتظار اجرای هر بار شبیه سازی،  $E(T)$ ، را برای مقادیر مختلف تغییر در میانگین فرآیند نشان می‌دهد. به عبارت دیگر  $E(T) = ARL + 50$ . این جدول هم چنین میانگین نقطه تغییر برآورد شده و مقدار انحراف استاندارد برآورد کننده از نقطه واقعی تغییر را نشان می‌دهد. در جدول ۱ مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه تغییر،  $\Delta$ ، تخمین نقطه تغییر به مقدار واقعی آن نزدیک‌تر شده و شماره اولین نمونه خارج از کنترل کاهش می‌یابد. خطای استاندارد این تخمین زنده نیز با افزایش  $\Delta$  کاهش یافته است. جدول ۲ برآورد فاصله‌ای به صورت نسبت دفعاتی که تخمین زنده، نقطه تغییر را با فاصله  $m$  نمونه برآورد می‌کند، نشان می‌دهد. نتایج این

جدول ۲: نتایج ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی برای مقادیر مختلف تغییر در پارامتر  $\beta$  ( $\tau = 50$ )

$ncp$	$(\delta_1, \delta_2)$	$P( \hat{\tau} - \tau  \leq m)$						
		$m = 0$	1	2	3	4	5	6
0.002	(0,0.01)	0.18	0.32	0.45	0.56	0.67	0.71	0.76
0.009	(0.01,0.01)	0.23	0.42	0.51	0.63	0.76	0.81	0.85
0.020	(0.01,0.02)	0.32	0.49	0.56	0.70	0.80	0.86	0.89
0.037	(0.02,0.02)	0.39	0.51	0.62	0.76	0.85	0.90	0.94
0.037	(0.03,0.02)	0.38	0.50	0.63	0.78	0.83	0.90	0.94
0.058	(0.05,0)	0.44	0.60	0.69	0.81	0.89	0.92	0.96
0.083	(0.03,0.03)	0.53	0.67	0.76	0.86	0.92	0.96	0.98
0.113	(0.03,0.04)	0.57	0.76	0.86	0.91	0.95	0.98	0.99
0.148	(0.04,0.04)	0.66	0.83	0.91	0.95	0.98	1.00	
0.187	(0.03,0.06)	0.74	0.89	0.94	0.98	1.00		
0.231	(0.05,0.05)	0.79	0.92	0.96	0.99	1.00		
0.233	(0.1,0)	0.80	0.92	0.96	0.98	1.00		
0.332	(0.06,0.06)	0.88	0.93	0.97	1.00			
0.522	(0.05,0.1)	0.91	0.97	1.00				
0.561	(0.09,0.08)	0.95	0.98	1.00				
0.925	(0.1,0.1)	0.96	0.99	1.00				

## مراجع

- [13] Walker, E., Wright, S., (2007). *Comparing curves using additive models*, Journal of Quality Technology. 34(1), 118-129.
- [14] Williams, J. D., Woodall, W. H., Birch, J. B., (2007). *Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles*, Quality and Reliability Engineering International. 23(8), 925-941.
- [15] Vaghefi, A., Tajbakhsh, S. D., Noorossana, R., (2009). *Phase II monitoring of nonlinear profiles*, Communications in Statistics Theory and Methods. 38(11), 1834-1851.
- [16] Yeh, B., Huwang, L., Li, Y. M., (2009). *Profile monitoring for a binary response*, IIE Transaction. 41(11), 931-941.
- [17] Pignatiello, J. J., Samuel, T. R., (1998a). *Identifying the time of a step change with X control charts*, Journal of Quality Engineering. 10(3), 521-527.
- [18] Pignatiello, J. J., Samuel, T. R., (1998b). *Identifying the time of a step change in a normal process variance*, Journal of Quality Engineering. 10(3), 529-538.
- [19] Pignatiello, J. J., Samuel, T. R., (2001). *Estimation of the change point of a normal process mean in SPC applications*, Journal of Quality Technology. 33(1), 82-95.
- [20] Perry, M. B., Pignatiello, J. J., (2005). *Estimation of the change point of a poisson rate parameter with a linear trend disturbance*, Quality and Reliability Engineering International, 22(4), 371-384.
- [21] Perry, M. B., Pignatiello, J. J., (2006). *Estimation of the change point of a normal process mean with a linear trend disturbance*, Quality Technology and Quantitative Management. 3(3), 101-115.
- [22] Albert, A., Anderson, J. A., (1984). *On the existence of maximum likelihood estimates in logistic regression models*, Biometrika. 71(1), 1-10.
- [23] Cullagh, M. C., Nelder, J. A., (1989). *Generalized linear models*, 1nd ed. London, UK: Chapman & Hall.
- [1] Mestek, O., Pavlik, J., Suchnek, M., (1994). *Multivariate control charts: Control charts for calibration curves*, Fresenius Journal of Analytical Chemistry. 350, 344-351.
- [2] Kang, L., Albin, S. L., (2000). *Online monitoring when the process yields a linear profile*, Journal of Quality Technology. 32(4), 418-426.
- [3] Mahmoud, M. A., Woodall, W. H., (2004). *Phase I analysis of linear profiles with calibration applications*, Technometric. 46(4), 380-391.
- [4] Amiri, A., Jensen, W. A., Kazemzadeh, R. B., (2010). *A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry*, Quality and Reliability Engineering International. 26(5), 09-520.
- [5] Kim, K., Mahmoud, M. A., Woodall, W. H., (2003). *On the monitoring of linear profiles*, Journal of Quality Technology. 35(3), 317-328.
- [6] Mahmoud, M. A., Parker, P. A., Woodall, W. H., Hawkins, D. M., (2007). *A change point method for linear profile data*, Quality and Reliability Engineering International. 23(2), 247-268.
- [7] Zou, C., Zhang, Y., Wang, Z., (2006). *Control chart based on change point model for monitoring linear profiles*, IIE Transactions. 38(12), 1093-1103.
- [8] Jensen, W. A., Birch, J. B., Woodall, W. H., (2008). *Monitoring correlation within linear profiles using mixed models*, Journal of Quality Technology. 40(2), 167-183.
- [9] Zou, C., Tsung, F., Wang, Z., (2007). *Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes*, Technometrics. 49(4), 395-408.
- [10] Amiri, A., Eyvazian, M., Zou, C., Noorossana, R., (2012). *A parameters reduction method for monitoring multiple linear regression profiles*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 58, 621-629.
- [11] Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R., Amiri, A., (2008). *Phase I monitoring of polynomial profiles*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 37(10), 1671-1686.
- [12] Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R., Amiri, A., (2009). *Monitoring polynomial profiles in quality control applications*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 42(7), 703-712.