تخمین نقطه تغییر در میانگین یک فرآیند دو مشخصه وصفی با توزیع بینم

سارا افروزان[a]
(نویسنده مسئول) کارشناس ارشد مهندسی صنایع، دانشکده صنایع دانشگاه آزاد اسلامی- واحد تهران جنوب
سید تقی اخوان نیاکی[b]
استاد، دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف

چکیده نمودارهای کنترل ابزار قدرتمندی هستند که به منظور پایش تغییرات فرآیند مورد استفاده قرار می‌گیرند. در کنترل فرآیند آماری، موارد بسیار زیادی وجود دارد که مشخصه های کیفی وصفی در محصول یا فرآیند، به صورت همزمان پایش می‌شوند. اگرچه دریافت اخطار در نمودارهای کنترل بیانگر وجود تغییر در فرآیند است ولی اغلب زمان شروع تغییر مشخص نیست. تشخیص زمان دقیق شروع تغییر به مهندسین فرآیند در شناسایی علل تغییر و همچنین بهبود فرآیند کمک می‌کند. در این مقاله تکنیک های کنترل فرآیند آماری برای فرآیندی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد که مشخصه های کیفی وصفی از نوع منطبق/ نامنطبق به صورت دو متغیره اندازه گیری می‌شوند، همچنین با استفاده از روش بیشترین درستنمایی تخمین زننده ای برای برآورد زمان شروع تغییر در این فرآیندها پیشنهاد می‌کنیم. در این مقاله فرض بر این است که دو مشخصه‌ی کیفی وصفی مختلف در یک محصول دارای همبستگی هستند. نتایج شبیه سازی نشان داده است که روش پیشنهادی برای شناسایی زمان تغییر در بردار میانگین فرآیند از عملکرد خوبی برخوردار است.

کلمات کلیدی نقطه تغییر، کنترل فرایند آماری، نمودار کنترل دو مشخصه وصفی بینم، برآورد بیشترین درستنمایی

۱- مقدمه

کنترل فرایند آماری[۱] (SPC)، به عنوان یکی از شاخه های اصلی کنترل کیفیت آماری[۲] (SQC)، مجموعه ای قدرتمند و توانا از ابزار حل مسئله است که در ایجاد ثبات در فرآیند و بهبود کارایی آن از طریق کاهش تغییر پذیری مفید واقع می‌شود. نمودارهای کنترل، از جمله پرکاربردترین ابزار هفت گانه SPC، روش مناسبی برای کنترل فرآیند در حین تولید است که امکان پی بردن سریع به وجود انحرافات با دلیل یا تغییر در مشخصه های کیفی فرآیند را فراهم می‌سازد تا پیش از آنکه تعداد زیادی محصول معیوب تولید شود علل ایجاد چنین انحرافاتی بررسی و اقدامات اصلاحی مناسب انجام شود [۱]. در اغلب محصولات و فرآیندها، نمی توان ویژگی های کیفی را به سادگی اندازه گیری کرد. در اینگونه موارد، هر محصول بازرسی شده را به دو گروه منطبق و نامنطبق، و یا شمارش تعداد نقص ها یا عیب های مشاهده شده در یک واحد بازرسی مشخص تقسیم بندی می‌کنند. ویژگی‌های کیفی که بدین طریق بازرسی می‌شوند را مشخصه های کیفی وصفی می‌نامند. نمودارهای کنترل p و np برای کنترل نسبت و یا تعداد اقلام نامنطبق در یک نمونه از محصولات با فرض تقریب پذیری توزیع احتمالی گسسته بینم با یک توزیع احتمالی نرمال برای پایش مشخصه های کیفی تکی به کار برده می‌شوند. ولی با در نظر گرفتن واقعیات موجود، در بسیاری از مواقع دو یا چند مشخصه وصفی از یک فرآیند باید به طور همزمان پایش شوند.

امروزه در صنعت، موارد زیادی وجود دارد که در آن نظارت یا کنترل همزمان دو یا چند ویژگی کیفی وابسته در فرآیند ضروری است و پایش این ویژگی های کیفی به طور مستقل می تواند بسیار گمراه کننده باشد.. تکنیک های کنترل فرآیند چند متغیره در سال ۱۹۴۷ برای اولین بار توسط هتلینگ[۳] مورد مطالعه قرار گرفته است، که در آن روش های کنترل فرآیند چند متغیره برای مساله تعیین زاویه بمب بکار گرفته شد[۲]. نمودارهای کنترل توانایی کشف تغییر را با یک تاخیر زمانی از لحظه وقوع تغییر دارا هستند. از آنجایی که برای شناسایی علل انحرافات بادلیل نیاز به داشتن زمان واقعی تغییر داریم، یکی از موثرترین راهکارها تخمین نقطه تغییر است. تحقیقات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است، که از آن جمله می توان به موارد زیر اشاره کرد: وودال و سالیوان[۴] (۱۹۹۶) با استفاده از آزمون نسبت درستنمایی نمودار کنترلی طراحی کردند که آماره آن مشاهدات انفرادی بوده و برای کشف تغییر در میانگین و واریانس فرآیند مورد استفاده قرار می گیرد[۳].

[a] (Corresponding Author)s.afroozan@yahoo.com
[b] niaki@sharif.edu

پیگناتیلو[5] و ساموئل[6] (۱۹۹۸) با استفاده از روش برآورد بیشترین بیشترین درستنمایی بر روی نمودارهای X ,S ,C شوهارت، تخمین زننده ای برای زمان واقعی تغییر در پارامتر فرآیند بدست آوردند [۴]، [۵]، [۶]. همچنین در سال۲۰۰۱ بر روی نمودار کنترل p و np نیز برآورد کننده‌ی بیشترین درستنمایی نقطه تغییر را بکار بردند[۷]. در سال ۲۰۰۱ پیگناتیلو و ساموئل، تخمین زننده نقطه تغییر توسط MLE[7] را با تخمین زننده های دو روش CUSUM[8] و EWMA[9] بر روی نمودار $\bar{X}$ با یکدیگر مقایسه کردند [۸]. پری، پیگناتیلو و سیمسون در سال ۲۰۰۶ با فرض وجود تغییر روند خطی در فرآیند و با استفاده از روش MLE تخمین زننده دیگری را برای تعیین نقطه تغییر در یک فرآیند پواسان بدست آوردند [۹].

به طور کلی تحقیقات انجام گرفته در زمینه تخمین نقطه تغییر فرآیند، به سه روش تخمین زننده بیشترین درستنمایی (MLE)، نمودار کنترل جمع تجمعی (CUSUM) و نمودار میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) تقسیم می‌شود.

اگر چه در کتب مرجع کنترل کیفیت آماری و مقالات پیشگفته روشهای مختلفی برای تخمین نقطه تغییر فرآیندهای تک متغیره و همچنین چند متغیره با مشخصه های قابل اندازه‌گیری که از یک توزیع نرمال چند متغیره پیروی می‌کنند ارائه شده است اما موضوع تخمین نقطه تغییر در فرآیندهایی با مشخصه های کیفی وصفی تنها در حالت تک متغیره بررسی شده است. بر این اساس ما از یک نمودار کنترل دو مشخصه ی وصفی تعداد اقلام نامنطبق در یک نمونه و از حدود کنترل این نمودار به عنوان حدود مبنا برای پایش فرآیند و تخمین نقطه تغییر استفاده می‌کنیم. بنابراین در این مقاله، برای اولین بار نقطه تغییر در میانگین یک فرآیند دو مشخصه وصفی با توزیع بینم، توسط برآورد کننده MLE تخمین زده می شود.

۲- نمودار کنترل دو مشخصه وصفی بر مبنای توزیع بینم

برخلاف مقالات متعدد منتشر شده در زمینه نمودارهای کنترل چند متغیره، در مبحث نمودارهای کنترل چند مشخصه وصفی که در فرآیندهای تولیدی بسیار حائز اهمیت است، تحقیقات اندکی صورت گرفته‌است. بسیاری از روش‌ها در فرآیندهای چند متغیره مثل روشهای کنترل مبنی بر آماره T^2 (هتلینگ) انجام شده‌اند. لازم به ذکر است در فرآیندهایی که پایش مشخصه‌های وصفی به صورت همزمان مدنظر قرار می‌گیرد ممکن است بین مشخصه‌های وصفی همبستگی وجود داشته باشد. بنابراین به منظور افزایش کارایی در پایش توام چند مشخصه وصفی و درنظر گرفتن همبستگی بین مشخصه ها، نمودار کنترل چند مشخصه وصفی لو[10] و همکاران [۱۰] مورد بررسی قرار می‌گیرد. چون در این مقاله قصد تخمین نقطه تغییر در نمودار کنترل دو مشخصه وصفی لو را داریم، در ادامه شرح مختصری از این روش را ارائه می‌کنیم.

لاوری و مونتگـومری (۱۹۹۵) نشان داده‌اند که نمودار کنترل چند متغیره حساسیت بهتری نسبت به نمودارهای کنترل تک متغیره در بررسی فرآیندهای کیفی چند متغیره دارد. این امر در نتیجه بهبودهای اخیـر در کنترل کیفیت چند متغیـره (MRC) مانند نمودارهای کنترل جمع تجمعی و نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی و نمودارهای T2 هتلینگ و کاربـرد مؤثر این تکنیک‌ها برای شناسایی علت سیگنال خارج از کنترل است[۱۰].

لو و همکاران [۱۰]، با استفاده از روش نمودار کنترل شوهـارت، شیوه ای برای پایش فرآیندی با چند مشخصه وصفـی، که از توزیع بینم چند متغیره پیروی می کند، پیشنهاد کرده‌اند. در این روش آماره کنترل، Z، بصورت مجموع موزون اقلام نامنطبق در هر نمونه n تایی از محصولات فرآیند محاسبه می‌شود.

$$Z = \sum_{i=1}^{k} X_i / \sqrt{p_i} \qquad (۱)$$

طوریکه k نشاندهنده تعداد مشخصه های کیفی و p_i نشاندهنده نسبت اقلام نامنطبق برای مشخصه وصفی iام ($i = 1,...,k$) است. بدین ترتیب در فرآیندی که مشخصه های کیفی آن از درجه اهمیت یکسانی برخوردار هستند، با استفاده از اصول نمودار کنترل شوهـارت، حدود کنترل نمودار MNP به شیوه زیر محاسبه می شود.

$$UCL = \mu_w + k\sigma_w \qquad (۲)$$
$$CL = \mu_w$$
$$LCL = \mu_w - k\sigma_w$$

حدود کنترل نمودار لو و همکاران به صورت زیر ارائه شده است.

$$UCL = n\sum_{i=1}^{k}\sqrt{p_i} + ۳\sqrt{n\left\{\sum_{i=1}^{k}(1-p_i) + ۲\sum_{i<j}\rho_{ij}\sqrt{(1-p_i)(1-p_j)}\right\}}$$

$$CL = n\sum_{i=1}^{k}\sqrt{p_i}$$

$$LCL = n\sum_{i=1}^{k}\sqrt{p_i} - 3\sqrt{n\left\{\sum_{i=1}^{k}(1-p_i)+2\sum_{i<j}\rho_{ij}\sqrt{(1-p_i)(1-p_j)}\right\}} \quad (3)$$

طوریکه ρ_{ij} نماینده میزان ضریب همبستگی بین دو مشخصه کیفی iام و j ام است، که توسط رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\rho_{ij} = Cov(C_i, C_j)/\sqrt{Var(C_i)Var(C_j)} = E[(C_i - E(C_i))(C_j - E(C_j))]/\sqrt{Var(C_i)Var} \quad (4)$$

همچنین روش برآورد پارامترهای نمودار کنترل شامل مقدار نسبت اقلام معیوب مشخصه های وصفی و مقدار ضریب همبستگی بین آنها بر اساس مشاهدات یک طرح مبنا توسط لو و همکاران [۱۰] ارائه شده است. بنابراین حدود کنترل آزمایشی فرآیند قابل محاسبه خواهند بود.

۲-۱- مدل احتمالی فرآیند

فرآیندی را در نظر بگیرید که در آن دو مشخصه کیفی مجزا در هر محصول تولیدی، از جهت مطابقت با استانداردهای فرآیند، بطور همزمان مورد بازرسی قرار می‌گیرد. بدین ترتیب هر محصول پس از بازرسی و با در نظر گرفتن هر یک از دو مشخصه مورد بررسی به طور جداگانه، در دو دسته‌ی منطبق و یا نامنطبق جای می گیرد. به عبارت دیگر هر محصول پس از عملیات ارزیابی کیفی در قالب یکی از چهار گروه $(0,0)$، $(0,1)$، $(1,0)$ و یا $(1,1)$ قابل دسته بندی است، طوریکه مولفه اول/دوم از این زوج مرتب به ترتیب بیانگر انطباق یا عدم انطباق محصول با توجه به ویژگی کیفی اول/دوم هستند. همچنین اگر برای پایش فرآیند، یک نمونه شامل n محصول از فرآیند مورد ارزیابی قرار گیرد، n_{00}، n_{01}، n_{10} و n_{11} نشاندهنده تعداد محصولاتی هستند که به ترتیب در هر یک از چهار گروه پیشگفته دسته بندی شده‌اند، طوریکه مقدار احتمال متناظر با هر یک از چهار گروه بالا با نمادهای p_{00}، p_{01}، p_{10} و p_{11} نشان داده می‌شوند. اگر X نشاندهنده تعداد اقلام نامنطبق در یک نمونه nتایی از محصولات بر حسب مشخصه کیفی اول، و Y نیز بیانگر تعداد اقلام نامنطبق نمونه بر حسب مشخصه کیفی دوم باشد، X و Y دارای توزیع بینم دو متغیره به ترتیب با میانگین‌های $\mu_X = np_X$ و $\mu_Y = np_Y$ خواهند بود. همچنین میزان ضریب همبستگی بین دو مشخصه کیفی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\rho_{XY} = \frac{p_{11} - p_X p_Y}{\sqrt{p_X(1-p_X)p_Y(1-p_Y)}} \quad (5)$$

بطوریکه احتمال وقوع هر حالت برابر است با $p_X = p_{10} + p_{11}$ و $p_Y = p_{01} + p_{11}$. همچنین می توان نوشت:

$$X = n_{10} + n_{11}$$
$$Y = n_{01} + n_{11} \quad (6)$$

تابع احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y عبارتست از:

$$g(x,y) = \sum_{n_{11}} \frac{n!\,p_{11}^{n_{11}}(p_X - p_{11})^{x-n_{11}}(p_Y - p_{11})^{y-n_{11}}}{n_{11}!(x-n_{11})!(y-n_{11})!(n-x-y+n_{11})!} (1-p_X-p_Y+p_{11})^{n-x-y+n_{11}} \quad (7)$$

طوریکه نماد جمع در دامنه مقادیر $\max(0, x+y-n) \le n_{11} \le \min(x,y)$ محاسبه می شود[۱۱].

۳- برآورد نقطه تغییر برای نمودار کنترل دو مشخصه وصفی با توزیع بینم با استفاده از روش MLE

در نظر بگیرید X و Y دو مشخصه کیفی وصفی با توزیع بینم بوده و پس از زمان نامعلوم τ هر دو یا یکی از میانگین‌های فرآیند از مقدار μ_0 به مقدار نامعلوم μ_1 تغییر کرده است، و تا زمانی که علل تغییر مشخص و رفع نشده‌اند فرآیند در سطح جدید μ_1 باقی می ماند.

با فرض اینکه Z_T ($Z_1, Z_2, \ldots, Z_\tau, Z_{\tau+1}, \ldots, Z_T$) اولین زیرگروهی است که از حدود کنترل خارج شده و خطای □ شامل آن نیست و τ زمان واقعی تغییر در میانگین فرآیند است، می توان نوشت $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\tau$ از فرآیند تحت کنترل و $Z_{\tau+1}, \ldots, Z_T$ خارج از کنترل به سر می‌برند.

۳-۱- تخمین پارامترهای مدل

چنانچه مقدار کواریانس دو مشخصه کیفی X و Y بصورت $\sigma_{XY} = p_{11} - p_X p_Y$ نشان داده شود، در این صورت تابع درستنمایی برای نمونه ای شامل n واحد محصول به صورت زیر بدست می آید:

$$L(p_X, p_Y, \sigma_{XY}) = \prod_{i=1}^{n} g(x, y; p_X, p_Y, \sigma_{XY}) \quad (۸)$$

که پس از محاسبه به شکل زیر نوشته می شود:

$$L(p_X, p_Y, \sigma_{XY}) \propto \quad (۹)$$

$$(\sigma_{XY} + p_X p_Y)^{n_{11}} (p_X - \sigma_{XY} - p_X p_Y)^{n_{10}}$$

$$(p_Y - \sigma_{XY} - p_X p_Y)^{n_{01}} (1 - p_X - p_Y + p_X p_Y + \sigma_{XY})^{n_{00}}$$

برای محاسبه برآورد پارامترهای این مدل، مقدار سه پارامتر p_X ، p_Y و σ_{XY} طوری تعیین می شود که لگاریتم تابع درستنمایی بیشینه شود. بدین ترتیب دستگاه معادلاتی زیر شامل سه معادله حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \partial \log(L)/\partial p_X &= 0 \\ \partial \log(L)/\partial p_Y &= 0 \\ \partial \log(L)/\partial \sigma_{XY} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در نهایت جواب دستگاه معادلات فوق که در واقع برآورد بیشترین درستنمایی مدل را حاصل می سازد به صورت زیر بدست می آید[۱۱]:

$$\begin{aligned} \hat{p}_X &= \frac{n_{1\cdot}}{n} \\ \hat{p}_Y &= \frac{n_{\cdot 1}}{n} \\ \hat{\sigma}_{XY} &= \frac{(n_{\cdot\cdot} n_{11} - n_{\cdot 1} n_{1\cdot})}{n^2} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با توجه به محاسبه تابع درستنمایی در این روش، زمان تغییر τ در نمودار کنترل دو مشخصه وصفی با توزیع بینم، نقطه ای است که در آن مقدار لگاریتم تابع درستنمایی به بیشترین مقدار خود می‌رسد، که با در نظر گرفتن برآورد پارامترهای فرآیند به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L(p_X, p_Y, \sigma_{XY}) = \prod_{i=1}^{\tau} \prod_{j=1}^{n} g(x, y; p_X, p_Y, \sigma_{XY}) \times \prod_{i=\tau+1}^{T} \prod_{j=1}^{n} g(x, y; \hat{p}_X, \hat{p}_Y, \hat{\sigma}_{XY}) \quad (۱۲)$$

بنابراین مقدار $\hat{\tau}$ از رابطه زیر بدست می آید.

$$\hat{\tau} = \arg \max_{0<t<T} \left(\log L(p_X, p_Y, \sigma_{XY}) \right) \quad (۱۳)$$

۳-۲- بررسی عملکرد تخمین‌زننده بیشترین درستنمایی در نمودار کنترل دو مشخصه وصفی با توزیع بینم

در این قسمت برای ارزیابی عملکرد تخمین‌زننده بیشترین درستنمایی از شبیه‌سازی استفاده کرده‌ایم. برای این منظور مقدار احتمال خطای نوع اول در سطح ۰/۰۰۲۷ ثابت در نظر گرفته می شود. نقطه تغییر فرآیند در $\tau = ۵۰$ قرار دارد. فرض می‌کنیم برای زیرگروه‌های $i = ۱،۲،...،۵۰$ در وضعیت تحت کنترل، مقدار میانگین دو ویژگی کیفی موردنظر برابر با ۰.۱ = p_{X0} و ۰.۲۵ = p_{Y0}) $\mu_X = np_X$ و $\mu_Y = np_Y$ بیانگر میانگین هر یک از دو مشخصه، $\sigma_X^2 = np_X(1-p_X)$ و $\sigma_Y^2 = np_Y(1-p_Y)$ نشاندهنده واریانس آنها و $n(p_{11} - p_X p_Y)$ نشاندهنده مقدار کواریانس این دو متغیر است)، اندازه نمونه برابر با $n = ۲۵$ و مقدار همبستگی بین این دو برابر با $\rho_0 = ۰.۵$ است. در وضعیت تحت کنترل از بردار $p_{00} = ۰.۷۴$ ، $p_{01} = ۰.۱۶$ ، $p_{10} = ۰.۰۱$ و $p_{11} = ۰.۰۹$ برای تولید داده‌های تصادفی فرآیند استفاده می‌شود. چنانچه وقوع یک انحراف با دلیل موجب تغییر در بردار میانگین فرآیند شود بطوریکه مقدار همبستگی آنها ثابت باقی بماند، جدول ۱ عملکرد نمودار کنترل دو متغیره بینم و روش پیشنهادی MLE را در شناسایی نقطه تغییر در فرآیند پیشگفته برای چهار حالت مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در جدول ۱ ملاحظه می شود، در سطر ۱ زمانی که میانگین مشخصه اول افزایش می‌یابد، زمان مشاهده نقطه خارج از کنترل در نمودار ۸۳/۵۳۳۲ است و متوسط زمان تخمین تغییر در میانگین ۵۰/۱۳۱۹ است که به زمان واقعی تغییر یعنی ۵۰

ردیف	p_X	p_Y	$E(T)$	$\bar{\hat{\tau}}$	$Se(\hat{\tau})$
1	**0.2**	**0.25**	83.5332	50.1319	0.0158
2	**0.1**	**0.15**	172.2225	49.8837	0.0246
3	**0.2**	**0.35**	59.2628	50.0317	0.0208
4	**0.2**	**0.15**	156.3582	50.0142	0.0057

جدول ۱: نتایج شبیه سازی میانگین و خطای استاندارد نقطه تغییر $\boldsymbol{\tau = 50}$ نمودار کنترل دو مشخصه وصفی با توزیع بینم دو متغیره

بسیار نزدیک است. همچنین در سطر ۳ زمانی که میانگین دو مشخصه کیفی در یک جهت تغییر می‌کنند زمان دریافت سیگنال ۵۹/۲۶۲۸ بوده و متوسط زمان تخمین تغییر در فرآیند ۵۰/۰۳۱۷ است. در قسمت آخر هنگامی که میانگین دو مشخصه موردنظر در جهت عکس هم تغییر می‌کنند نیز متوسط زمان تخمین تغییر۵۰/۰۱۴۲ است که به $\tau = ۵۰$ بسیار نزدیک است.

جدول ۲ نتایج شبیه سازی را به ازای مقادیر مختلف تغییر بردار میانگین فرایند در بردارد. مطابق جدول (۲) زمانی که میانگین مشخصه اول افزایش می‌یابد، در ۵۸٪ مواقع برآورد نقطه تغییر همان زمان واقعی تغییر را نشان می دهد، و در ۸۲٪ مواقع با زمان واقعی تغییر به اندازه یک زیرگروه، در ۹۸٪ مواقع به اندازه ۴ زیرگروه و در ۹۹٪ مواقع به اندازه ۵ زیرگروه فاصله دارد.

جدول ۲: نتایج شبیه سازی برای مقادیر متفاوت تغییر در بردارهای میانگین در نمودار کنترل دو مشخصه وصفی با توزیع بینم دو متغیره

p_X	0.2	0.1	0.2	0.2
p_Y	0.25	0.15	0.35	0.15
$\hat{P}(\hat{\tau} = \tau)$	0.5827	0.4603	0.5036	0.8238
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 1)$	0.8190	0.7151	0.7504	0.964
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 2)$	0.9104	0.8341	0.8601	0.989
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 3)$	0.9538	0.8948	0.9147	0.997
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 4)$	0.9756	0.9316	0.9442	0.9995
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 5)$	0.9860	0.9559	0.9650	0.9999
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 6)$	0.9922	0.9703	0.9783	1
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 7)$	0.9957	0.9787	0.9854	1
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 8)$	0.9973	0.9845	0.9918	1
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 9)$	0.9982	0.9883	0.9941	1
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 10)$	0.9987	0.9916	0.9957	1
$\hat{P}(\lvert\hat{\tau} - \tau\rvert \le 15)$	0.9996	0.9987	0.9996	1

همچنین زمانی که میانگین مشخصه دوم کاهش می‌یابد، در ۴۶٪ مواقع برآورد نقطه تغییر در واقع همان زمان واقعی تغییر را نشان می دهد، و در ۸۳٪ مواقع با زمان واقعی تغییر به اندازه ۲ زیرگروه و در ۹۳٪ مواقع به اندازه ۴ زیرگروه و در ۹۷٪ مواقع به اندازه ۶ زیرگروه فاصله دارد. هنگامی که دو مشخصه کیفی در جهت عکس تغییر می کنند، در ۸۲٪ موارد زمان واقعی تغییر به درستی نشان داده می شود، و در ۹۶٪ مواقع با زمان واقعی تغییر به اندازه یک زیرگروه و در ۹۹٪ مواقع به اندازه ۲ زیرگروه فاصله دارد.

۴- نتیجه و جمع بندی

هدف از کنترل فرآیند آماری بهبود فرآیند و افزایش کارایی از طریق کاهش تغییرپذیری است. یکی از راه‌های دستیابی به این هدف، تعیین زمان واقعی تغییر در فرآیند است. برآورد این نقطه، بینش عمیقتری را برای مهندسین فرآیند در پیدا کردن علل انحرافات بادلیل فراهم می‌کند. در این مقاله روش پیشنهادی تخمین‌زننده بیشترین درستنمایی (MLE) برای تعیین نقطه تغییر در فرآیند دو مشخصه وصفی ارائه شد؛ که در آن ویژگی های کیفی محصول از توزیع بینم دو متغیره پیروی می‌کنند. عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از یک نمونه کاربردی و شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مقایسه نشان داد که در فرآیند بینم دو متغیره، روش پیشنهادی در شناسایی زمان واقعی تغییر از توانایی بالایی برخوردار بوده و برآورد نقطه تغییر به زمان واقعی تغییر بسیار نزدیک است. لازم به ذکر است که بمنظور شبیه سازی وضعیت خارج از کنترل تنها تغییراتی در نظر گرفته شد که منجر به تغییر در بردار میانگین یکی یا هر دو متغیر فرآیند شده اما میزان همبستگی بین مشخصه های کیفی ثابت باقی بماند.

۵- مراجع

[1] Montgomery, D. C. (2001). *Introduction to statistical quality control*. 4th Edition, John wiley and Sons, New York.

[2] Bersimis, S., Psarakis, S,. and Panaretos, J., (2007). *Multivariate Statistical Process Control Charts: An Overview*. Qual. Reliab. Engng. Int, vol. 23, pp. 517–543.

[3] Sullivan, J. H., and Woodall, W. H. (1996). *A Comparison of Multivariate Quality. Control Charts for Individual Observations*. Journal of Quality Technology, vol. 28. pp. 398-408.

[4] Pignatiello, J. J., JR. and Samuel, T. R. (1998a) *Identifying the Time of a Step Change with XBar Control Charts*. Journal of Quality Engineering. Vol. 10(3), pp. 521-527.

[5] Pignatiello, J. J., JR. and Samuel, T. R. (1998b). *Identifying the Time of a Step Change in a Normal Process Variance*. Journal of Quality Engineering. Vol. 10, No. 3, pp. 529-538.

[6] Pignatiello, J. J., JR. and Samuel, T. R. (1998c). *Identifying the Time of a Step Change in a Poisson Rate Parameter*. Journal of Quality Engineering. Vol. 10, No. 3, pp. 673-681.

[7] Pignatiello, J. J., JR. and Samuel, T. R. (2001). *Identifying the Time of a Step Change in the Process Fraction Nonconforming*. Journal of Quality Engineering. Vol. 13. No. 3, pp. 357-365.

[8] Pignatiello, J. J., JR. and Samuel, T. R. (2001). *Estimation of the Change Point of a Normal Process Mean in SPC Applications*. Journal of Quality Technology. Vol. 33, pp. 82-95.

[9] Perry, M.B. and Pignatiello, J. J., JR. and Simpson J.R. (2006). *Estimation of the Change Point of the Process Fraction Nonconforming with a Monotonic Change Disturbance in SPC*. Quality and Reliability Engineering International. Vol. 23, No. 3, pp. 327-339.

[10] Lu X.S., Xie, M., Goh, T.N., Lai, C.D., (1998). *Control Chart for Multivariate Attribute Processes*. International Journal of Production Research, Vol. 36, No. 12, pp. 3477–3489.

[11] Kocherlakota,S., and Kocherlakota,K. (1992). *Bivariate Discrete Distribution*. Marcel Dekker, New York.

[1] Statistical process control
[2] Statistical quality control
[3] Hotelling
[4] Sullivan
[5] Pignatiello
[6] Samuel
[7] Maximum Likelihood Estimator
[8] Cumulative Sum
[9] Exponentially Weighted Moving Average
[10] Lu