



Paper Type: Original Article

An Improved E2-Bayesian Estimator for the Efficiency Parameter of an Infinite-Capacity Multi-Server Queueing System

Shahram Yaghoobzadeh Shahrastani^{1*} , Iman Makhdom¹ 

¹Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran; yagoubzade@pnu.ac.ir; makhdoom@pnu.ac.ir.

Citation:

Received: 24 February 2025

Revised: 20 May 2025

Accepted: 15 July 2025

Yaghoobzadeh Shahrastani, Sh., & Makhdom, I. (2026). An improved E2-Bayesian estimator for the efficiency parameter of an infinite-capacity multi-server queueing system. *Journal of Quality Engineering and Management*, 16(1), 1-14.

Abstract

Purpose: The study aims to develop a new Bayesian estimation approach, termed the E2-Bayesian method, for estimating the traffic intensity parameter in the multi-server $M/M/c/\infty$ queueing system. Given the crucial role of accurate efficiency estimation in optimizing service systems, this research addresses the need for more reliable inference under uncertainty.


Methodology: The $M/M/c/\infty$ queueing model, characterized by c servers, exponential interarrival times with rate parameter λ , and exponential service times with rate parameter μ , is considered. The traffic intensity parameter is estimated using Bayesian, E-Bayesian, and the newly proposed E2-Bayesian methods under the general entropy loss function. The performance of the proposed estimator is assessed through Monte Carlo simulation and validated using a real dataset.

Findings: Simulation results and empirical analysis demonstrate that the proposed E2-Bayesian estimator outperforms the traditional Bayesian and E-Bayesian estimators in terms of efficiency and accuracy. The estimator that minimizes the mean waiting time of customers in the queue is identified as the optimal choice.

Originality/Value: This research introduces a novel E2-Bayesian estimation approach that enhances the precision of parameter estimation in queueing models under uncertainty. The integration of the general entropy loss function provides a flexible and robust framework, contributing to the advancement of Bayesian inference in stochastic systems.

Keywords: E2-Bayesian estimation, General entropy loss function, $M/M/c/\infty$ queueing model, Mean waiting time.

 Corresponding Author: yagoubzade@pnu.ac.ir

 10.48313/jqem.2025.553995.1579



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



برآورد جدید E^2 - بیز پارامتر بهره‌دهی سیستم صف‌بندی چندباجه‌ای با ظرفیت نامتناهی

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی^{۱*}، ایمان مخدوم^۱

^۱گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: این پژوهش با هدف توسعه یک رویکرد جدید برآورد بیزی با عنوان روش E^2 -بیز برای برآورد پارامتر شدت ترافیک در سیستم صف‌بندی چندباجه‌ای $M/M/c/\infty$ انجام شده است. با توجه به اهمیت برآورد دقیق پارامتر بهره‌دهی در بهینه‌سازی سیستم‌های خدماتی، این تحقیق به نیاز موجود برای استنتاج‌های قابل اعتمادتر در شرایط عدم قطعیت می‌پردازد.

روش‌شناسی پژوهش: مدل صف‌بندی $M/M/c/\infty$ که شامل c باجه خدمت‌دهنده است، در نظر گرفته شد. فواصل زمانی بین ورود مشتریان دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و فواصل زمانی خدمت دارای توزیع نمایی با پارامتر μ است. پارامتر شدت ترافیک با استفاده از روش‌های بیز، E -بیز و روش پیشنهادی جدید E^2 -بیز تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برآورد شد. عملکرد برآوردگر پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده واقعی ارزیابی گردید.

یافته‌ها: نتایج شبیه‌سازی و تحلیل تجربی نشان داد که برآوردگر پیشنهادی E^2 -بیز از نظر کارایی و دقت نسبت به برآوردگرهای بیز و E -بیز عملکرد بهتری دارد. برآوردگری که میانگین مدت‌زمان انتظار مشتریان در صف را حداقل می‌کند، به‌عنوان برآوردگر بهینه انتخاب شد.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: این پژوهش یک رویکرد نوین برآورد E^2 -بیز را معرفی می‌کند که دقت برآورد پارامترها را در مدل‌های صف‌بندی تحت شرایط عدم قطعیت بهبود می‌بخشد. به‌کارگیری تابع زیان آنتروپی عمومی چارچوبی انعطاف‌پذیر و مقاوم فراهم می‌کند و گامی موثر در پیشبرد استنتاج بیزی در سیستم‌های تصادفی به‌شمار می‌آید.

کلیدواژه‌ها: برآورد E^2 -بیز، تابع زیان آنتروپی عمومی، مدل صف‌بندی $M/M/c/\infty$ ، متوسط مدت‌زمان انتظار.

۱- مقدمه

برآورد به روش‌های درستی‌مایی ماکسیمم و بیز در نظریه صف‌بندی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته شد که بعضی از آن‌ها عبارتند از: برآورد پارامترهای مدل صف‌بندی $M/M/1$ تحت حالت پایا به روش درستی‌مایی ماکسیمم توسط کلارک [1]، برآورد نرخ ورود و نرخ سرویس مشتری‌ها در مدل‌های صف‌بندی $M/M/1$ و $M/M/\infty$ توسط موداپور [2]، برآورد بیز تجربی پارامترهای مدل‌های صف‌بندی $M/M/1$ و $M/M/\infty$ و بررسی خواص مجانبی آن‌ها توسط تیروویارو و باسو [3]، برآورد‌های درستی‌مایی ماکسیمم و بیز پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/1$ توسط چاودوری و موخرجی [4]، برآورد ناپارامتری توزیع زمان سرویس در مدل‌های صف‌بندی زمان-گسسته توسط

سچویر و ویچل هوس [5]، برآوردهای درست‌مایی ماکسیمم و بیز پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/D/1$ توسط چاندراسخار و همکاران [6]، برآورد پارامتر شدت ترافیک و احتمال پایایی سیستم مدل صف‌بندی $M/M/c$ توسط یعقوب‌زاده [7]، بهبود کیفیت سیستم‌های صف‌بندی $M/M/m/K$ با استفاده از بهینه‌سازی تابع هزینه سیستم توسط مخدوم و یعقوب‌زاده شهرستانی [8]، ارایه یک برآورد آماری بهینه از پارامتر شدت ترافیک برای مدل صف‌بندی $M/m/1/K$ بر اساس معیارهای فازی و غیرفازی توسط مخدوم [9]، ارایه برآورد بیز در مدل صف‌بندی $M/M/1$ تحت داده‌های سانسور شده نوع ۲ بر اساس معیارهای فازی و غیرفازی توسط مخدوم و یعقوب‌زاده شهرستانی [10] و اخیراً یعقوب‌زاده شهرستانی و همکاران [11] مطالعه‌ای را در خصوص بهینه‌سازی ارتقا کیفیت خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{M/E_r/1, r \in N\}$ بر اساس یک تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم و رضایت مشتری تحت یک زمان توقف انجام داده‌اند. اخیراً ماجد [12] به جست‌وجوی یک حل تحلیلی دقیق برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول وابسته به زمان که نشان‌دهنده تعداد مشتریان در یک سیستم صف $M/D/1$ غیرایستا یا متغیر با زمان است، پرداخته است. پوردرویش و حسینی [13] برآورد بیزی و بیز تجربی پارامتر شدت ترافیک در مدل صف $M/M/1$ تحت توابع زیان متقارن و نامتقارن و بر اساس دو پیشین مختلف ناآگاهی‌بخش و بتا را مورد بررسی قرار می‌دهند. بولحسنی و همکاران [14] یک مدل ریاضی چندهدفه برای مساله مکان‌یابی-مسیریابی-موجودی مواد خطرناک ارایه کردند که در آن تقاضای کشسان و سیستم صف نیز لحاظ شده است. ا. ماجد و بچرول [15] به بررسی پایداری و رفتار تصادفی مدل صف غیرایستای $D/M/1$ و مدل $GI/M/1$ PSFFA با تاخیر بسیار پایین پرداخته و کاربرد آن را در سامانه‌های رانندگی خودکار تحلیل کرده‌اند. ا. ماجد [16] در این مطالعه چارچوبی مبتنی بر هندسه اطلاعات برای تحلیل سیستم‌های صف غیروابسته به زمان ارایه کرده است. ا. ماجد [17] در این مطالعه، تحلیل هندسه اطلاعاتی پویایی‌های موقت مدل صف $M/M/\infty$ را ارایه کرده است. خلیل‌پور و یوسفی‌نژاد عطاری [18] در این مطالعه به مدل‌سازی صف‌بندی و حل مساله تصادفی پوشش حداکثری تسهیلات پیشگیرانه متعدد پرداخته و از الگوریتم‌های فراابتکاری برای یافتن راه‌حل بهینه استفاده کرده‌اند. خلیلی و مصدق‌خواه [19] یک مدل ریاضی جدید مبتنی بر نظریه صف برای برنامه‌ریزی ظرفیت هتل ارایه کردند و برای حل آن از الگوریتم ژنتیک استفاده نمودند. فیورینی و همکاران [20] با بهره‌گیری از نظریه آلفا یک تحلیل کمی از تاخیر در صف‌های $GI/G/1$ با ترافیک سنگین دم ارایه کردند.

در این مقاله بر اساس برآورد E -بیز، برآوردی جدید برای پارامتر شدت ترافیک مدل صف‌بندی $M/M/c/\infty$ معرفی می‌شود.

از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارایه شده است. یکی از این روش‌ها، روش برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین است که انتخاب معقول آن‌ها روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر باعث افزایش خطا و بزرگ‌شدن معیارهای مقایسه می‌شود؛ بنابراین تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابرپارامترهای توزیع پیشین، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. برآوردهای E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی از این نوع هستند. توزیع پیشین بیز سلسله‌مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [21] معرفی شد و سپس توسط هان [22] مورد بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی معرفی شدند. اخیراً از روش‌های E -بیز و بیز سلسله‌مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط هان [23]، [24] برای برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲، بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط جاهین و اکاشا [25] و برای برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط وانگ و همکاران [26] و یوسف‌زاده [27] مورد استفاده قرار گرفته شد.

کیفیت یک سیستم صف‌بندی به‌وسیله یک مجموعه عوامل مشخص می‌شود که معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم نام دارد. لازم است که این معیارها محاسبه شود تا بتوان درباره کیفیت یک سیستم صف‌بندی نظر داد. در محاسبه این معیارها، پارامتر شدت ترافیک نقش مهمی دارد؛ بنابراین برآورد آن به روش‌های مختلف آماری توصیه می‌شود تا بتوان به بهترین برآوردگر رسید. از طرفی علاوه بر روش‌های موجود باید به دنبال روش‌های جدید برآورد و مقایسه آن با روش‌های برآورد موجود بود. به همین دلیل روش برآورد جدید برای پارامتر شدت ترافیک آن معرفی شد.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش دوم مفاهیم اولیه آماری و ساختار ریاضی آن‌ها که در این مقاله مورد نیاز است ارایه شده است. در بخش سوم برآورد E -بیز و در بخش چهارم برآورد جدید پارامتر شدت ترافیک که در این مقاله برآورد E^2 -بیز نامیده می‌شود در دو فرم به‌دست آورده می‌شود. در بخش پنجم با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده‌های واقعی برتری برآوردگر جدید در مقایسه با برآوردگرهای بیز و E -بیز نشان داده می‌شود.

۲- مرور ادبیات

۲-۱- مفاهیم اولیه

در هر سیستم صف بندی λ را نرخ ورود مشتریان به آن گویند یعنی فرض می شود در هر واحد زمانی به طور متوسط λ مشتری به سیستم وارد می شود. همچنین μ نرخ سرویس گویند یعنی فرض می شود که در هر واحد زمانی به طور متوسط μ مشتری سرویس می شود. در مدل صف بندی $M/M/c$ پارامتر شدت ترافیک $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ است.

در این مقاله $\{U_k, k \geq 1\}$ زمان های بین ورودها و به عنوان دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با چگالی $f(u, \lambda)$ و $\{V_k, k \geq 1\}$ زمان های سرویس و به عنوان دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با چگالی $g(v, \mu)$ در نظر گرفته می شوند به طوری که λ و μ به ترتیب پارامترهای نرخ ورود و نرخ سرویس در نظر گرفته می شوند و هر دو پارامتر نامعلوم فرض می شوند.

$$f(u, \lambda) = \lambda e^{-\lambda u}, u > 0, \lambda > 0, \quad g(v, \mu) = \mu e^{-\mu v}, \mu > 0, v > 0. \quad (1)$$

در این مقاله فرض می شود اولین متقاضی در زمان صفر وارد سیستم شده و سرویس نیز بعد از اولین ورود شروع می شود. همچنین فرض می شود سیستم تا زمان T فعال هست و $A(T)$ و $B(T)$ به ترتیب به عنوان تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم تا زمان T و تعداد متقاضیان سرویس شده از سیستم تا زمان T در نظر گرفته می شوند.

بر اساس سینگ و آچاریا [28] چهار حالت برای T در نظر گرفته شده است:

حالت ۱: اگر سیستم تا زمان مشخص t فعال باشد واضح است که $T=t$ و $A(T)$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

حالت ۲: اگر سیستم تا موقعی کار کند که d متقاضی سرویس شود یعنی $B(T)=d$. در این حالت $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^d V_i$ و $A(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

حالت ۳: اگر سیستم تا موقعی کار کند که m متقاضی به سیستم وارد شده باشند یعنی $A(T)=m$. در این حالت $T = \gamma(T) + \sum_{i=1}^m U_i$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

حالت ۴: اگر سیستم تا موقعی کار کند که n متقاضی در سیستم باشد یعنی $A(T) + B(T) = n$. در این حالت T و $A(T)$ و $B(T)$ متغیرهای تصادفی هستند.

بنابراین با در نظر گرفتن نمونه

$$X = \{A(T), B(T), U_1, \dots, U_{A(T)}, V_1, \dots, V_{B(T)}\}. \quad (2)$$

تحت هر یک از چهار حالت T بر اساس سینگ و آچاریا [28]، تابع درستیابی به صورت زیر می شود.

$$L_T(\lambda, \mu) = \prod_{i=1}^{A(T)} f(u_i, \lambda) \prod_{i=1}^{B(T)} g(v_i, \mu) = \lambda^{A(T)} \mu^{B(T)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{A(T)} u_i - \mu \sum_{i=1}^{B(T)} v_i}. \quad (3)$$

در ادامه تابع زیان آنتروپی عمومی معرفی می شود. در بسیاری از موقعیت های کاربردی در نظریه برآوردهای بی زی، تابع زیان به صورت تابعی بر

حساب $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ بیان می شود. کالابریا و پولسینی [29] تابع زبانی به نام تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت $p \neq 0$ $L(\hat{\theta}, \theta) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^p - p \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1$

معرفی کردند که مینیمم آن در نقطه $\hat{\theta} = \theta$ رخ می دهد. به ازای $p = 1$ این تابع زیان تعمیمی از تابع زیان آنتروپی می شود که توسط دی و همکاران [30] معرفی شد. اگر فرض شود $\ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) = \hat{\theta} - \theta$ آنگاه تابع زیان نمایی خطی به صورت $p(\hat{\theta} - \theta) - 1 - e^{p(\hat{\theta} - \theta)}$ به دست آورده می شود که توسط زلنر

[31] معرفی شد. برآورد بیز پارامتر θ به شرط داده ها توسط کالابریا و پولسینی [29] به صورت $\hat{\theta}_{GB} = [E(\theta^{-p} | data)]^{-\frac{1}{p}}$ به دست آورده شد.

اکنون با توجه به هان [22] برآوردهای بیز و بیز سلسله مراتبی به صورت های زیر تعریف می شوند.

تعریف ۱- فرض کنید b_1 و b_2 ابرپارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1, b_2)$ و توزیع پیشین توام (b_1, b_2) و $\hat{\theta}_B(b_1, b_2)$ برآورد بیز θ باشند، آنگاه برآورد E -بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می شود به صورت $b_1 \in \Lambda_1, b_2 \in \Lambda_2$ $\hat{\theta}_{EB} = E[\hat{\theta}_B(b_1, b_2)] = \int_{\Lambda_1} \int_{\Lambda_2} \hat{\theta}_B(b_1, b_2) \pi(b_1, b_2) db_1 db_2$ به دست می آید.

۳- برآورد E-بیز

در این بخش ابتدا برآورد بیز پارامتر شدت ترافیک تحت تابع زیان آنتروپی و با توجه به توزیع های پیشین انتخابی به دست آورده می شود. سپس به کمک این برآوردگر و با استفاده از **تعریف ۱**، برآورد E -بیز پارامتر شدت ترافیک به دست آورده می شود که این برآوردگر E -بیز نقش بسیار مهمی در تولید برآوردگر جدید که هدف اصلی مقاله است، دارد.

در این بخش λ و μ پارامترهای مستقل از هم و با توزیع های پیشین به ترتیب

$$\pi_1(\lambda | a_1, b_1) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \lambda^{a_1-1} e^{-b_1 \lambda}, \lambda > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, \text{ and} \quad (4)$$

$$\pi_2(\mu | a_2, b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \mu^{a_2-1} e^{-b_2 \mu}, \mu > 0, a_2 > 0, b_2 > 0 \quad (5)$$

در نظر گرفته می شوند. با فرض $T_2 = \sum_{i=1}^{B(T)} V_i$ و $T_1 = \sum_{i=1}^{A(T)} U_i$ و رابطه (۳) تا رابطه (۵) توزیع پسین

$$\pi(\lambda, \mu | X) = \frac{(b_1 + T_1)^{a_1 + A(T)} (b_2 + T_2)^{a_2 + B(T)}}{\Gamma(a_1 + A(T)) \Gamma(a_2 + B(T))} \lambda^{a_1 + A(T) - 1} \mu^{a_2 + B(T) - 1} e^{-\lambda(b_1 + T_1) - \mu(b_2 + T_2)} \quad (6)$$

به دست آورده می شود. بنابراین برآورد بیز پارامتر شدت ترافیک مدل صف بندی $M/M/c/\infty$ به صورت $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ تعریف می شود با توجه به رابطه

(۳) و تحت تابع زیان آنتروپی عمومی عبارت است از:

$$\hat{\rho}_{GB} = [E(\rho^{-p} | X)]^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{c} (\phi)^{-\frac{1}{p}} \frac{b_2 + T_2}{b_1 + T_1} \quad (7)$$

که در آن $\phi = \frac{\Gamma(a_1 + A(T) - p) \Gamma(a_2 + B(T) + p)}{\Gamma(a_1 + A(T)) \Gamma(a_2 + B(T))}$ است.

با توجه به هان [22]، در رابطه (۴)، a_1 و b_1 طوری در نظر گرفته می شود که نسبت به λ کاهشی باشد، بنابراین با توجه به رابطه

باید $\frac{d\pi_1(\lambda | a_1, b_1)}{d\lambda} = \frac{b_1^{a_1} \lambda^{a_1-2} e^{-b_1 \lambda}}{\Gamma(a_1)} ((a_1 - 1) - b_1 \lambda)$ باشد. برگر [32] نشان داد که بزرگ شدن b_1 باعث می شود، کارایی

برآوردگر بیز λ کاهش یابد؛ بنابراین ابرپارامتر b_1 باید از بالا کران دار شده و به صورت $0 < b_1 < c_1$ که c_1 عددی ثابت است در نظر گرفته شود در نتیجه

با توجه به هان [22]، b_1 به صورت یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_1)$ یعنی $\pi_3(b_1) = \frac{1}{c_1}$ و $0 < b_1 < c_1$ در نظر گرفته می شود.

همچنین با توجه به شرط $0 < a_1 \leq 1$ ، بدون ازدست دادن کلیت مساله فرض می کنیم $a_1 = 1$ باشد که در این صورت رابطه (۴) به رابطه (۸) تبدیل می شود.

$$\pi_1(\lambda | b_1) = b_1 e^{-b_1 \lambda}, \lambda > 0, b_1 > 0. \quad (8)$$

با استدلالی مشابه استدلال فوق درباره a_2 و b_2 در رابطه (۵)، توزیع b_2 $\pi_4(b_2)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_2)$ که c_2 عددی ثابت است در نظر گرفته می شود و با انتخاب $a_2 = 1$ ، رابطه (۵) به رابطه (۹) تبدیل می شود.

$$\pi_2(\mu | b_2) = b_2 e^{-b_2 \mu}, \mu > 0, b_2 > 0. \quad (9)$$

با توجه به تعریف ۱ و با استفاده از رابطه (۷) تا رابطه (۹) برآورد E -بیز پارامتر ρ به صورت زیر به دست آورده می شود.

$$\hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) = \int_0^{c_2} \int_0^{c_1} \hat{\rho}_B(b_1, b_2) \pi(b_1, b_2) db_1 db_2 = \frac{1}{6c_1 c_2} \log \left(\frac{c_1 + T_1}{T_1} \right). \quad (10)$$

۴- برآورد E^2 -بیز

در بخش ۳ ابرپارامتر b_1 و b_2 به صورت $0 < b_i < c_i$ در نظر گرفته شده است. در تمام مقالات c_i ثابت در نظر گرفته شده است. اما در این مقاله علاوه بر ثابت بودن، حالت متغیر تصادفی بودن c_i در دو حالت پیوسته و گسسته در نظر گرفته می شود و هر حالت به صورت قضیه بیان می شوند.

قضیه ۱- اگر c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی پیوسته و مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال $f_{c_i}(t) = e^{-t}, t > 0$ باشند، آنگاه تحت شرط $c_1 < T_1$ ، برآورد E^2 -بیز عبارت است از:

$$\hat{\rho}_{E^2B} = \frac{\phi^{-1} (1 + 2(1-\theta)T_2)}{6c} \sum_{c_1=1}^{\infty} \theta^{c_1-1} \Phi(c_1, T_1),$$

که در آن $\Gamma(i, T_1) = \int_0^{T_1} t^{i-1} e^{-t} dt$ است.

برهان: با الگوبرداری از تعریف ۱، برآوردی جدید به نام E^2 -بیز برای پارامتر ρ به صورت زیر تعریف و به دست آورده می شود.

$$\hat{\rho}_{E^2B} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) \pi(c_1, c_2) dc_1 dc_2. \quad (11)$$

به کمک بسط مک لورن $\log(1 + \frac{c_1}{T_1})$ ، $\hat{\rho}_{E^2B}$ از رابطه (۱۱) به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{E^2B} &= \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (c_2 + T_2) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} c_1^{i-1}}{iT_1^i} \right) e^{-(c_1+c_2)} dc_2 dc_1 \\ &= \frac{1}{6c} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{iT_1^i} \Gamma(i, T_1). \end{aligned}$$

قضیه ۲- اگر c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی گسسته و مستقل و با مقادیر صحیح و مثبت و هم توزیع با توزیع هندسی با تابع احتمال $f_{c_i}(t) = (1-\theta)\theta^{t-1}, t=1,2,3,\dots, i=1,2, 0 < \theta < 1$ باشند، برآورد E^2 -بیز پارامتر ρ تحت شرط $c_1 < T_1$ عبارت است از:

$$\hat{\rho}_{E^2B} = \frac{\phi^{-1} (1 + 2(1-\theta)T_2)}{6c} \sum_{c_1=1}^{\infty} \theta^{c_1-1} \Phi(c_1, T_1)$$

که در آن $\Phi(c_1, T_1) = \sum_{i=1}^{[T_1]} \frac{(-1)^{i+1} c_1^{i-1}}{iT_1^i}$ است.

برهان: با توجه به تعریف ۱، برآورد E^2 -بیز در این مقاله به صورت زیر تعریف می شود.

$$\hat{\rho}_{E^2B} = \sum_{c_1=1}^{\infty} \sum_{c_2=1}^{\infty} \hat{\rho}_{EB}(c_1, c_2) \pi(c_1, c_2). \quad (12)$$

به کمک بسط مک لورن $\log(1 + \frac{c_1}{T_1})$ ، $\hat{\rho}_{E^2B}$ از رابطه (۱۲) به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{E^2B} &= \frac{-\frac{1}{p}}{6c} \left(\sum_{c_2=1}^{\infty} (c_2 + 2T_2)(1-\theta)\theta^{c_2-1} \right) \left(\sum_{c_1=1}^{[T_1]} (1-\theta)\theta^{c_1-1} e^{-\frac{c_1}{T_1}} \right) \\ &= \frac{-\frac{1}{p}(1+2(1-\theta)T_2)}{6c} \sum_{c_1=1}^{\infty} \theta^{c_1-1} \Phi(c_1, T_1). \end{aligned}$$

۵- تحلیل عددی

در این بخش با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو و یک مجموعه داده های واقعی برآورد E^2 -بیز با برآوردهای بیز و E -بیز مقایسه می شود تا برآوردگر مطلوب پارامتر شدت ترافیک تعیین شود. از آنجایی که وقت هر مشتری بسیار ارزشمند است؛ بنابراین کاهش این مدت زمان در صف انتظار از دغدغه های هر سیستم صف بندی است. به این علت، برآوردگر مطلوب آن برآوردگری است که بتواند مدت زمان در صف متقاضی را مینیمم کند. همچنین در این بخش فرض می شود زمان توقف سیستم $T = s$ باشد.

۱-۵- مطالعه شبیه سازی

در این زیربخش از روش شبیه سازی مونت کارلو برای یافتن برآوردگر مطلوب پارامتر شدت ترافیک استفاده می شود که مراحل شبیه سازی عبارت است از:

گام ۱- یک نمونه تصادفی $A(s) = 25$ تایی از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = 2$ تولید شده و سپس $T_1 = \sum_{i=1}^{A(s)} u_i$ محاسبه می شود.

گام ۲- یک نمونه تصادفی $B(s) = 30$ تایی از توزیع نمایی با پارامتر $\mu = 3$ تولید شده و $T_2 = \sum_{i=1}^{B(s)} v_i$ محاسبه می شود.

گام ۳- با فرض $c_1 = 3$ و $c_2 = 2$ از توزیع های یکنواخت در بازه $(0, c_1)$ و یکنواخت در بازه $(0, c_2)$ عددی به تصادف تولید شده و به ترتیب b_1 و b_2 نامگذاری شده و سپس به ازای $c = 3, 4, 5$ و ps مختلف و به کمک رابطه های (۷) و (۱۰) به ترتیب برآوردهای بیز و E -بیز و با استفاده از قضیه (۱) و قضیه (۲) به ترتیب برآوردهای E^2 -بیز در حالت های پیوسته و گسسته به دست آورده می شود.

گام ۱ تا گام ۳، ۱۰۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین مقادیر برآوردهای بیز، E -بیز، E^2 -بیز در حالت های پیوسته و گسسته در این ۱۰۰۰۰ بار به دست آورده شده و در جدول ۱ تا جدول ۳ که به ترتیب با نمادهای $AV(\hat{\rho}_B)$ ، $AV(\hat{\rho}_{EB})$ ، $AV(\hat{\rho}_{E^2B}^I)$ و $AV(\hat{\rho}_{E^2B}^2)$ نشان داده می شود، ثبت شده است. در مدل صف بندی $M/M/c/\infty$ با نرخ های ورود و سرویس به ترتیب λ و μ متوسط مدت زمان انتظار در صف بر اساس آلن [33] عبارت است از:

$$W_q = \frac{c^{c-1} \rho^c}{c! \mu (1-\rho)^2} \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} \right)^{-1}. \quad (13)$$

بر اساس جدول ۱ تا جدول ۳، مقادیر W_q تحت برآوردهای بیز، E ، بیز، E^2 بیز در حالت پیوسته و E^2 -بیز در حالت گسسته که به ترتیب با نمادهای $\hat{W}_{E^2B}^2$ و $\hat{W}_{E^2B}^1$ ، \hat{W}_{EB} ، $\hat{W}_{q,B}$ نشان داده می‌شود به کمک رابطه (۱۳) به دست آورده شده و در جدول ۴ تا جدول ۶ ثبت شده است. با توجه به جدول ۴ تا جدول ۶ نتیجه گرفته می‌شود که مناسب‌ترین برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل صف بندی $M/M/c/\infty$ ، برآورد E^2 -بیز در حالت پیوسته است. برآورد E^2 -بیز در حالت گسسته ممکن است از برآورد E^2 -بیز در حالت پیوسته بهتر نباشد، اما از برآوردهای بیز و E -بیز بهتر است. بنابراین به طور کلی نتیجه گرفته می‌شود که برآورد E^2 -بیز از برآوردهای بیز و E -بیز بهتر است. نحوه انتخاب برآوردگر مطلوب به این صورت است. چون وقت مشتری بسیار ارزشمند است و یکی از اهداف هر سیستم صف بندی کاهش این مدت زمان در صف انتظار و ارائه خدمات مطلوب به مشتری و کسب رضایت آن می‌باشد؛ بنابراین برآوردگری بتواند متوسط مدت زمان انتظار در صف مشتری را مینیمم کند آن برآوردگر به عنوان برآوردگر مطلوب انتخاب می‌شود. به عنوان مثال با توجه به جدول ۶ به ازای $c=5$ و $p=4$ ، متوسط مدت زمان انتظار در صف مشتری برای برآوردهای بیز، E -بیز، E^2 -بیز در حالت پیوسته و E^2 -بیز در حالت گسسته به ترتیب $0/01026$ ، $0/01138$ ، $0/00797$ و $0/00858$ به دست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود $0/00797$ کمترین مقدار در بین مقادیر است. یعنی برآورد E^2 -بیز در حالت پیوسته از سایرین بهتر است. از طرفی بعد از عدد $0/00797$ ، عدد $0/00858$ از دو عدد دیگر کوچکتر است. بنابراین برآورد E^2 -بیز در حالت گسسته ممکن است از برآوردگر E^2 -بیز در حالت پیوسته بهتر نباشد، اما از برآوردهای بیز و E -بیز بهتر است. البته با توجه به جدول ۴ تا جدول ۶، این وضعیت برای تمام ps در نظر گرفته شده به ازای $c=3$ ، $c=4$ و $c=5$ برقرار است؛ بنابراین نتیجه گرفته می‌شود که مناسب‌ترین برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل صف بندی $M/M/c/\infty$ ، در بین برآوردهای بیز، E -بیز و E^2 -بیز برآوردگر E^2 -بیز است. همچنین برتر بودن برآوردگر E^2 -بیز در حالت پیوسته نسبت به برآوردگر E^2 -بیز در حالت گسسته، این نتیجه را می‌دهد که بهتر است c_1 و c_2 متغیرهای تصادفی پیوسته در نظر گرفته شود. همچنین نمودار W_q به ازای ps مشخص در مقابل c در شکل ۱ تا شکل ۳ علاوه بر این که تاییدکننده نتایج شبیه سازی است، بلکه بیانگر این حقیقت است که به ازای هر c برآوردهای E^2 -بیز در مقایسه با برآوردهای بیز و E -بیز بهتر هستند. با مشاهده شکل‌ها واضح است که برآورد E^2 -بیز پارامتر شدت ترافیک بهترین عملکرد را دارد و بعد از آن برآورد E^2 -بیز در حالت گسسته است. در این شکل‌ها برآوردهای بیز، E -بیز، E^2 -بیزهای در حالت‌های پیوسته و گسسته پارامتر شدت ترافیک به ترتیب با نمادهای $TIP.B$ ، $TIP.EB$ ، $TIP.EEB1$ و $TIP.EEB2$ نشان داده شده است.

جدول ۱- برآوردهای مختلف ρ به روش‌های مختلف و به ازای $c=3$.

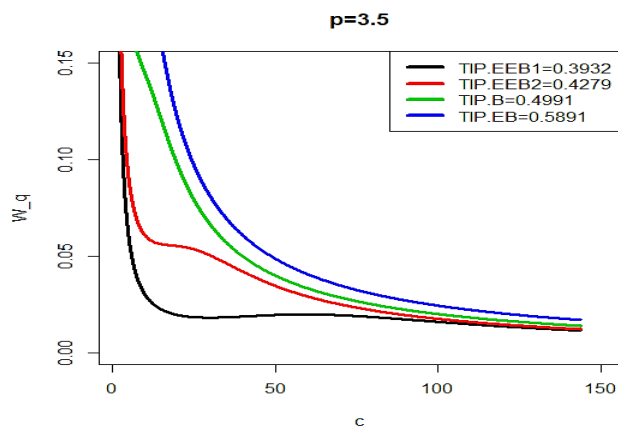
Table 1- Different estimates of ρ by different methods and for $c=3$.

P	AV($\hat{\rho}_B$)	AV($\hat{\rho}_{EB}$)	AV($\hat{\rho}_{E^2B}^1$)	AV($\hat{\rho}_{E^2B}^2$)
-2.5	0.2519	0.2818	0.2544	0.2581
-2	0.2512	0.2816	0.2548	0.2583
-1.5	0.2480	0.2715	0.2453	0.2488
-0.5	0.2285	0.2521	0.2271	0.2305
0.5	0.2173	0.2408	0.2173	0.2205
1.5	0.1968	0.2208	0.1985	0.2016
2	0.1995	0.2246	0.2024	0.2054
2.5	0.1962	0.2192	0.1979	0.2008
3	0.1952	0.2235	0.2022	0.2049
4	0.1763	0.1978	0.1780	0.1808

جدول ۲- برآوردهای مختلف ρ به روش‌های مختلف و به ازای $c=4$.

Table 2- Different estimates of ρ by different methods and for $c=4$.

P	AV($\hat{\rho}_B$)	AV($\hat{\rho}_{EB}$)	AV($\hat{\rho}_{E^2B}^1$)	AV($\hat{\rho}_{E^2B}^2$)
-2.5	0.2582	0.2659	0.2327	0.2419
-2	0.2575	0.2694	0.2406	0.2460
-1.5	0.2424	0.2529	0.2248	0.2301
-0.5	0.2286	0.2401	0.2127	0.2179
0.5	0.2206	0.2345	0.2079	0.2130
1.5	0.2182	0.2274	0.2021	0.2069
2	0.2150	0.2239	0.1992	0.2039
2.5	0.2082	0.2168	0.1917	0.1965
3	0.2029	0.2135	0.1894	0.1940
4	0.1993	0.2085	0.1851	0.1895



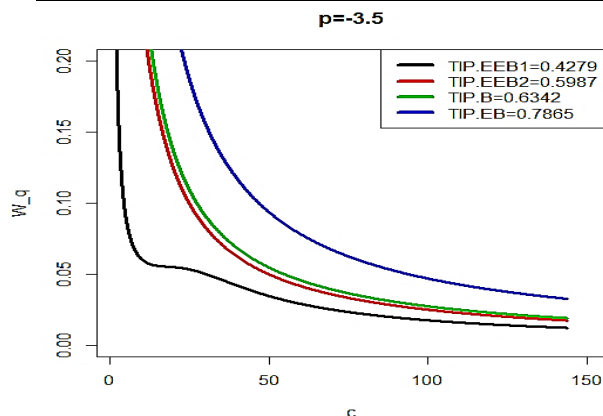
شکل ۱- نمودار W_q به ازای c مختلف و برآوردهای متفاوت ρ .

Figure 1- W_q diagram for different c and different ρ .

جدول ۳- برآوردهای مختلف ρ به روش‌های مختلف و به ازای $c=5$.

Table 3- Different estimates of ρ by different methods and for $c=5$.

P	$AV(\hat{\rho}_B)$	$AV(\hat{\rho}_{EB})$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^1)$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^2)$
-2.5	0.2464	0.2582	0.2278	0.2339
-2	0.2494	0.2571	0.2274	0.2332
-1.5	0.2421	0.2535	0.2242	0.2300
-0.5	0.2352	0.2438	0.2164	0.2219
0.5	0.2274	0.2229	0.2060	0.2114
1.5	0.2167	0.2249	0.1994	0.2045
2	0.2165	0.2251	0.1997	0.2047
2.5	0.2071	0.2182	0.1929	0.1979
3	0.2149	0.2231	0.1983	0.2032
4	0.1999	0.2072	0.1832	0.1879



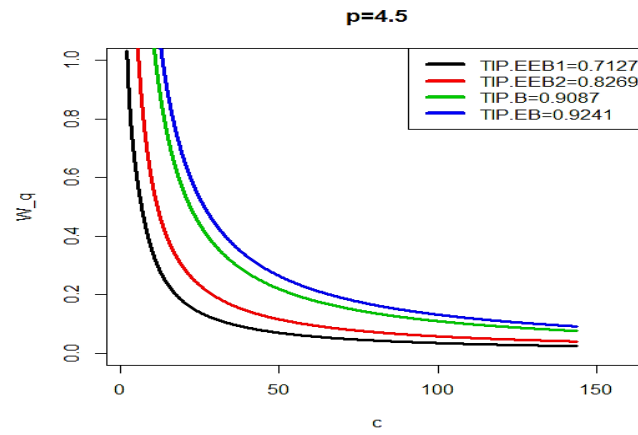
شکل ۲- نمودار W_q به ازای c مختلف و برآوردهای متفاوت ρ .

Figure 2- W_q 's diagram for different c s and different estimates of ρ .

جدول ۴- مقادیر W_q تحت روش‌های برآورد مختلف ρ و به ازای $c=3$.

Table 4- W_q values under different ρ estimation methods and for $c=3$.

P	$AV(\hat{\rho}_B)$	$AV(\hat{\rho}_{EB})$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^1)$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^2)$
-2.5	0.02189	0.02777	0.02004	0.2151
-2	0.02158	0.02772	-0.01988	0.02072
-1.5	0.02187	0.02482	0.01916	0.020198
-0.5	0.01549	0.02009	0.01484	0.01511
0.5	0.01752	0.01759	0.01306	0.01324
1.5	0.01051	0.01368	0.00991	0.01005
2	0.01109	0.01437	0.01019	0.01063
2.5	0.01039	0.01334	0.00971	0.00996
3	0.01102	0.01417	0.00958	0.01060
4	0.00767	0.00995	0.00713	0.00733



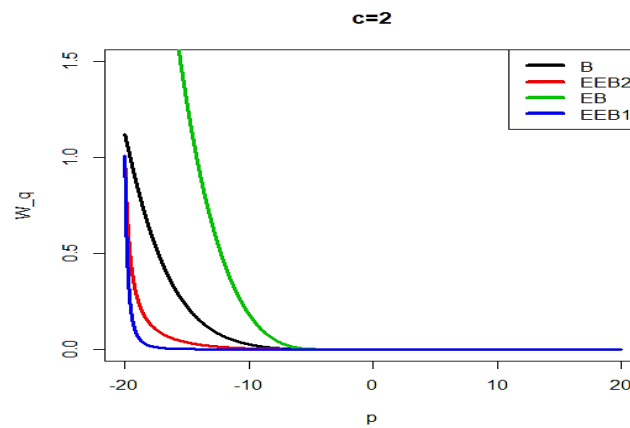
شکل ۳- نمودار W_q به ازای cs مختلف و برآوردهای متفاوت ρ .

Figure 3- W_q diagram for different cs and different ρ estimates.

جدول ۵- مقادیر W_q تحت روش‌های برآورد مختلف ρ و به ازای $c=4$.

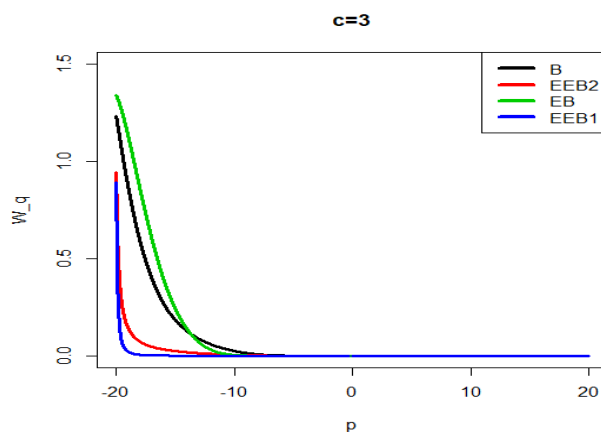
Table 5- W_q values under different ρ estimation methods and per $c=4$.

P	$AV(\hat{\rho}_B)$	$AV(\hat{\rho}_{EB})$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^1)$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^2)$
-2.5	0.02153	0.02345	0.01592	0.01782
-2	0.02136	0.02436	0.01754	0.01871
-1.5	0.01792	0.02028	0.01441	0.01542
-0.5	0.01513	0.01744	0.01228	0.01317
0.5	0.01364	0.01435	0.01149	0.01233
1.5	0.01332	0.01402	0.01059	0.01113
2	0.01267	0.01424	0.01016	0.01065
2.5	0.01154	0.01298	0.00908	0.00976
3	0.01071	0.01241	0.00878	0.00941
4	0.01016	0.01151	0.00821	0.00879



شکل ۴- نمودار W_q به ازای ps مختلف و برآوردهای متفاوت ρ .

Figure 4- W_q diagram for different ps and different ρ estimates.



شکل ۵- نمودار W_q به ازای ps مختلف و برآوردهای متفاوت ρ .

Figure 5- W_q diagram for different ps and different ρ estimates.

۵-۲- مثال عددی

در این بخش، یک سیستم صف‌بندی چندباجه‌ای با ظرفیت نامتناهی مربوط به یک بانک در شهر رشت (استان گیلان) که دارای سه دستگاه خودپرداز است، مورد مطالعه قرار گرفته است. داده‌های مربوط به فواصل زمانی بین ورودهای متوالی مشتریان و فواصل زمانی بین سرویس‌های متوالی (پایان رایه خدمت) در بازه زمانی ساعت ۸ تا ۱۱ صبح ($T=11$) یک روز کاری ثبت شده و در جدول‌های ۷ و ۸ گزارش گردیده است.

واحد زمانی تمامی داده‌ها برحسب دقیقه است. اندازه نمونه‌ها نیز در جدول‌های مربوطه ذکر شده است.

از آن‌جاکه در این مقاله، توزیع فواصل بین ورودها از نوع نمایی با پارامتر λ فرض شده است، با استفاده از داده‌های جدول ۷، مقدار برآورد درستی ماکسیمم λ برابر با $2/09$ به دست آمد. همچنین با فرض نمایی بودن فواصل زمانی بین سرویس‌های متوالی با پارامتر μ ، از داده‌های جدول ۸ مقدار برآورد درستی ماکسیمم μ برابر با $1/64$ محاسبه شد.

برای آزمون برازش، از آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف ($K-S$) با فرضیه‌های زیر استفاده شد:

۱. H_0 : داده‌ها از توزیع نمایی با پارامتر برآورد شده λ با μ پیروی می‌کنند.

۲. H_1 : داده‌ها از این توزیع پیروی نمی‌کنند.

نتایج آزمون $K-S$ برای فواصل بین ورودها (جدول ۷) به صورت زیر به دست آمد:

۱. آماره $K-S$ برابر $0/1297$ است.

۲. مقدار $p-value = 0.6466$.

که بیانگر عدم رد فرضیه صفر و در نتیجه مناسب بودن توزیع نمایی با پارامتر λ برابر با $2/09$ است.

برای فواصل زمانی سرویس‌ها (جدول ۸) نیز نتایج آزمون $K-S$ به صورت زیر بود:

۱. آماره $K-S$ برابر $0/1110$ است.

۲. مقدار $p-value = 0.7261$.

بنابراین، در این حالت نیز فرضیه صفر رد نشده و داده‌ها از توزیع نمایی با پارامتر μ برابر با $1/64$ پیروی می‌کنند.

به کمک داده‌های جدول‌های ۷ و ۸، مقادیر برآوردهای بیز، E -بیز، E^2 -بیز در حالت پیوسته و E^2 -بیز در حالت گسسته برای ρ به ازای ps مختلف به دست آورده شده و در جدول ۹ قرار داده شده است. همچنین با توجه به جدول ۹، مقدار W_q به ازای برآوردهای مختلف ps و ps مختلف محاسبه شد که در جدول ۱۰ قرار داده شده است. با توجه به نتایج جدول ۱۰ واضح است که برآورد E^2 -بیز در حالت پیوسته از بقیه برآوردهای پارامتر شدت ترافیک بهتر است. معیار انتخاب برآوردگر مطلوب در این مقاله، مینیمم شدن متوسط مدت زمان انتظار در صف مشتری به ازای برآوردهای به دست آمده است که در زیربخش ۵-۱ مفصل توضیح داده شده است.

در این مثال عددی، سیستم خودپردازهای بانک به صورت $M/M/3$ با ظرفیت نامتناهی مدل شده است. هرچند در واقعیت صف مشتریان دارای ظرفیت محدود است، اما در بازه زمانی نمونه برداری طول صف هیچ‌گاه به حد اشباع نرسید. بنابراین، فرض ظرفیت نامتناهی به عنوان تقریب مناسبی برای تحلیل عملکرد سیستم و محاسبه شاخص‌هایی مانند متوسط زمان انتظار (Wq) استفاده شده است. این توضیح نشان می‌دهد که مدل تحلیلی با ظرفیت نامتناهی، علی‌رغم سادگی، قادر است رفتار سیستم واقعی را به خوبی شبیه‌سازی کند.

جدول ۶- مقادیر W_q تحت روش‌های برآورد مختلف ρ و به ازای $c=5$.

Table 6- W_q values under different ρ estimation methods and per $c=5$.

P	$AV(\hat{\rho}_B)$	$AV(\hat{\rho}_{EB})$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^1)$	$AV(\hat{\rho}_{E^2B}^2)$
-2.5	0.01879	0.02153	0.01497	0.01614
-2	0.01947	0.02129	0.01489	0.01603
-1.5	0.01786	0.02042	0.01429	0.01539
-0.5	0.01643	0.01823	0.01291	0.01388
0.5	0.01430	0.01597	0.01119	0.01206
1.5	0.01296	0.01443	0.01019	0.01096
2	0.01292	0.01447	0.01023	0.01098
2.5	0.01138	0.01322	0.00925	0.00996
3	0.01265	0.01409	0.01002	0.01076
4	0.01026	0.01138	0.00797	0.00858

جدول ۷- فواصل زمانی بین ورودهای متوالی مشتریان مثال بانک.

Table 7- Time intervals between consecutive customer arrivals, bank example.

2.39	2.14	1.40	0.9	0.57	0.98	2.08	1.65
2.58	1.17	1.01	1.98	1.58	1.69	2.15	2.65
2.34	0.64	3.36	1.20	2.73	1.35	1.39	1.52
		0.48	1.41	3.26	0.19	2.38	1.30

جدول ۸- فواصل زمانی بین سرویس‌شده‌های متوالی مشتریان مثال بانک.

Table 8- Time intervals between consecutive service of bank customers.

0.34	0.14	1.00	1.00	0.21	0.42	1.00	0.42
0.41	0.26	0.76	1	0.14	1	0.63	0.42
0.36	1.10	0.34	0.15	0.21	1.92	1.62	1.10
		0.13	0.77	0.29	0.29	0.50	0.41

جدول ۹- برآوردهای مختلف ρ برای داده‌های مثال بانک و به ازای $c=4$.

Table 9- Different estimates of ρ for the bank example data and for $c=4$.

P	$\hat{\rho}_B$	$\hat{\rho}_{EB}$	$\hat{\rho}_{E^2B}^1$	$\hat{\rho}_{E^2B}^2$
-2.5	0.1172	0.1206	0.1098	0.1165
-2	0.1164	0.1194	0.1129	0.1154
-1.5	0.1182	0.1236	0.1143	0.1149
-0.5	0.1148	0.1159	0.1121	0.1127
0.5	0.1138	0.1142	0.1099	0.1106
1.5	0.1168	0.1186	0.1079	0.1085
2	0.1106	0.1163	0.1069	0.1075
2.5	0.1065	0.1096	0.0987	0.1059
3	0.1074	0.1086	0.1049	0.1057
4	0.1067	0.1112	0.1031	0.1037

جدول ۱۰- مقادیر W_q به ازای برآوردهای مختلف ρ و به ازای $c=4$ برای داده‌های مثال بانک.

Table 10- W_q values for different ρ estimates and for $c=4$ for the bank example data.

P	$\hat{\rho}_B$	$\hat{\rho}_{EB}$	$\hat{\rho}_{E^2B}^1$	$\hat{\rho}_{E^2B}^2$
-2.5	0.00217	0.00236	0.00180	0.00214
-2	0.00213	0.00230	0.00195	0.00208
-1.5	0.00223	0.00254	0.00202	0.00205
-0.5	0.00205	0.00210	0.00191	0.00194
0.5	0.00200	0.00202	0.00180	0.00184
1.5	0.00215	0.00225	0.00171	0.00174
2	0.00184	0.00213	0.00166	0.00169
2.5	0.00164	0.00179	0.00132	0.00162
3	0.00168	0.00174	0.00157	0.00161
4	0.00165	0.00187	0.00149	0.00152

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل صف‌بندی چندباجه‌ای با ظرفیت نامتناهی به نام $M/M/c/\infty$ در نظر گرفته شده است. کیفیت یک سیستم صف‌بندی به وسیله یک مجموعه عوامل مشخص می‌شود که معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم نام دارد. لازم است که این معیارها محاسبه شود تا بتوان درباره کیفیت یک سیستم صف‌بندی نظر داد. در محاسبه این معیارها، پارامتر شدت ترافیک نقش مهمی دارد؛ بنابراین برآورد آن به روش‌های مختلف آماری توصیه می‌شود تا بتوان به بهترین برآوردگر رسید. از طرفی علاوه بر روش‌های موجود باید به دنبال روش‌های جدید برآورد و مقایسه آن با روش‌های برآورد موجود بود. به همین دلیل روش برآورد جدید برای پارامتر شدت ترافیک آن معرفی شد. این برآوردگر جدید که برآوردگر E^2 -بیز نامیده می‌شود. بر اساس برآوردگر E -بیز تعریف و محاسبه می‌شود دو نوع برآوردگر E^2 -بیز برای پارامتر شدت ترافیک که به برآوردگر E^2 -بیز در حالت پیوسته و گسسته معروف هستند، به دست آورده شد. سپس به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی با داده‌های واقعی، برتری این روش برآورد جدید نسبت به برآوردهای بیز و E -بیز نشان داد شد. از آنجایی که وقت مشتری بسیار ارزشمند و کاهش آن که یکی از دغدغه‌های مهم هر سیستم صف‌بندی است؛ بنا بر این اگر برآوردگری بتواند متوسط مدت‌زمان انتظار در صف را مینیمم کند به آن برآوردگر مطلوب انتخاب می‌شود که برآوردگر E^2 -بیز انتخاب شد. همچنین چون برآورد E^2 -بیز در حالت پیوسته بهتر از سایر برآوردها شد. نتیجه گرفته شد کران بالای ابرپارامترها بهتر است متغیرهای تصادفی پیوسته در نظر گرفته شوند. تابع زیانی که در این مقاله استفاده شد تابع زیان آنتروپی عمومی نام دارد و تحت این تابع زیان تمام برآوردهای بیزی به دست آورده شد. در این مطالعه مدل $M/M/3$ با ظرفیت نامتناهی به کار رفته است. هر چند صف واقعی دستگاه‌های ATM ظرفیت فیزیکی محدودی دارد، اما در بازه زمانی نمونه‌برداری طول صف هرگز به حد اشباع نرسید؛ بنابراین این فرض تقریب مناسبی است. باین حال، این موضوع به‌عنوان یکی از محدودیت‌های مطالعه ذکر شده و بررسی مدل‌های دارای ظرفیت محدود ($M/M/c/K$) می‌تواند در تحقیقات آینده انجام شود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان صمیمانه از دقت نظر هیئت تحریریه و داوران ارجمند و از رهنمودهای ارزشمند آن‌ها که در بهبود کیفیت این مقاله نقش موثری داشته است، سپاسگزاری می‌نمایند.

منابع مالی

هیچ‌گونه حمایت مالی برای این پژوهش دریافت نشده است.

تعارض با منافع

نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تعارض منافی در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد.

- [1] Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The annals of mathematical statistics*, 28(4), 1036–1040. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177706808>
- [2] Muddapur, M. V. (1972). Bayesian estimates of parameters in some queueing models. *Annals of the institute of statistical mathematics*, 24(1), 327–331. <https://doi.org/10.1007/BF02479762>
- [3] Thiruvaiyaru, D., & Basawa, I. V. (1992). Empirical Bayes estimation for queueing systems and networks. *Queueing systems*, 11(3), 179–202. <https://doi.org/10.1007/BF01163999>
- [4] Chowdhury, S., & Mukherjee, S. P. (2013). Estimation of traffic intensity based on queue length in a single M/M/1 queue. *Communications in statistics - theory and methods*, 42(13), 2376–2390. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.609320>
- [5] Schweer, S., & Wichelhaus, C. (2020). Nonparametric estimation of the service time distribution in discrete-time queueing networks. *Stochastic processes and their applications*, 130(8), 4643–4666. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2020.01.011>
- [6] Chandrasekhar, P., Vaidyanathan, V. S., Durairajan, T. M., & Yadavalli, V. S. S. (2021). Classical and Bayes estimation in the M|D|1 queueing system. *Communications in statistics - Theory and methods*, 50(22), 5411–5421. <https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1734833>
- [7] Yaghoobzadeh, S. (2023). Estimation of traffic intensity parameter and stationarity probability of M/M/c queueing system under a stop time in the system. *Journal of statistical sciences*, 17(1), 219-233. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.61186/jss.17.1.8>
- [8] Makhdom, I., & Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2023). Improving the quality of M/M/m/K queueing systems using system cost function optimization. *Journal of quality engineering and management*, 13(3), 267-280. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.48313/jqem.2023.208474>
- [9] Makhdom, I. (2023). A new optimum statistical estimation of the traffic intensity parameter for the M/M/1/K queueing model based on fuzzy and non-fuzzy criteria. *Journal of data science and modeling*, 2(1), 163–184. <https://doi.org/10.22054/jdsm.2024.79643.1048>
- [10] Makhdom, I., & Yaghoobzadeh Shahrastani, S. (2024). Bayesian estimation in the M/M/1 queueing model under a Type II censoring scheme based on fuzzy data. *Journal of statistical modelling: Theory and applications*, 5(1), 131–143. <https://doi.org/10.22034/jsmta.2025.21733.1144>
- [11] Yaghoobzadeh Shahrastani, S., Jafari, A., & Makhdom, I. (2025). Optimization for enhancing the quality of the queueing model family $\{(ME_r)_{1,r \in \mathbb{N}}\}$ based on the cost function, probability of system stationary, and customer satisfaction under a finite time horizon. *Journal of quality engineering and management*, 15(3), 271-280. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.48313/jqem.2025.537574.1567>
- [12] Mageed, I. A. (2024). Ismail's ratio conquers new horizons The non-stationary M/D/1 queue's state variable closed form expression with queueing applications to traffic management optimization. *Journal of operational and strategic analytics*, 2(3), 144–159. <https://doi.org/10.56578/josa020302>
- [13] Poordarvish, A., & Hoseini, B. (2018). Parametric estimation of empirical Bayes of traffic intensity in M/M/1 queue system. *Journal of decisions and operations research*, 2(3), 195-204. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.22105/dmor.2018.58264>
- [14] Bolhasani, P., Fallah, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Alam Tabriz, A. (2021). Presenting a multi-objective mathematical model of a location-routing-inventory problem for hazardous materials considering the concept elastic demand and queueing system. *Journal of decisions and operations research*, 6(2), 210-241. **(In Persian)**. <https://doi.org/10.22105/dmor.2021.265606.1295>
- [15] Mageed, I. A., & Becheroul, A. (2024). Stability and randomness of nonstationary D/M/1 queue's GI/M/1 PSFFA model with ultra-low latency for autonomous driving. *Uncertainty discourse and applications*, 1(1), 101–109. <https://doi.org/10.48313/uda.v1i1.31>
- [16] A Mageed, I. (2024). Towards an info-geometric theory of the analysis of non-time dependent queueing systems. *Risk assessment and management decisions*, 1(1), 154–197. <https://doi.org/10.48314/ramd.v1i1.47>
- [17] Mageed, I. A. (2024). Information geometric analysis of the dynamics of transient M/M/∞ queue manifold: Information geometric analysis of the dynamics of transient M/M/∞ queue manifold. *REA press*, 2(2), 335-372. <https://doi.org/10.31181/sa22202433>
- [18] Khalilpour, Z., & Yousefi Nezhad Attari, M. (2019). Modeling and solving the stochastic problem of maximum coverage of multi-preventive facilities with meta-heuristic algorithms. *Journal of quality engineering and management*, 9(2), 154-171. **(In Persian)**. https://www.pqprc.ir/article_102750.html?lang=en
- [19] Khalili, S., & Mosadegh Khah, M. (2020). A new queueing-based mathematical model for hotel capacity planning: A genetic algorithm solution. *Journal of applied research on industrial engineering*, 7(3), 203–220. <https://doi.org/10.22105/jarie.2020.244708.1187>
- [20] Fiorini, F., Cococcioni, M., & Pagano, M. (2025). Quantitative delay analysis of GI/G/1 queues with heavy-tailed traffic by means of Alpha Theory. *Computer networks*, 269, 111394. <https://doi.org/10.1016/j.comnet.2025.111394>
- [21] Lindley, D. V., & Smith, A. F. M. (1972). Bayes estimates for the linear model. *Journal of the royal statistical society series b: Statistical methodology*, 34(1), 1–18. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1972.tb00885.x>
- [22] Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its applications. *Chinese operations research and management science*, 6(3), 31–40.
- [23] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied mathematical modelling*, 33(4), 1915–1922. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.03.019>
- [24] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution. *Applied mathematical modelling*, 35(5), 2419–2424. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.051>
- [25] Jaheen, Z. F., & Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on Type-2 censoring. *Applied mathematical modelling*, 35(10), 4730–4737. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.03.055>
- [26] Wang, J., Li, D., & Chen, D. (2012). E Bayesian estimation and hierarchical bayesian estimation of the system reliability parameter. *Systems engineering procedia*, 3, 282–289. <https://doi.org/10.1016/j.sepro.2011.11.031>

-
- [27] Yousefzadeh, F. (2017). E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimations for the system reliability parameter based on asymmetric loss function. *Communications in statistics-theory and methods*, 46(1), 1–8. <https://doi.org/10.1080/03610926.2014.968736>
- [28] Singh, S. K., & Acharya, S. K. (2019). Equivalence between Bayes and the maximum likelihood estimator in M/M/1 queue. *Communications in statistics-theory and methods*, 48(19), 4780–4793. <https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1481971>
- [29] Calabria, R., & Pulcini, G. (1996). Point estimation under asymmetric loss functions for left-truncated exponential samples. *Communications in statistics-theory and methods*, 25(3), 585–600. <https://doi.org/10.1080/03610929608831715>
- [30] Dey, D. K., Ghosh, M., & Srinivasan, C. (1986). Simultaneous estimation of parameters under entropy loss. *Journal of statistical planning and inference*, 15, 347–363. [https://doi.org/10.1016/0378-3758\(86\)90108-4](https://doi.org/10.1016/0378-3758(86)90108-4)
- [31] Zellner, A. (1986). Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. *Journal of the american statistical association*, 81(394), 446–451. <https://doi.org/10.1080/01621459.1986.10478289>
- [32] Berger, J. O. (2013). *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4286-2>
- [33] Allen, A. (1990). *Probability, statistics and queueing theory with computer science applications*. Academic Press. <https://www.sciencedirect.com/book/monograph/9780120510504/probability-statistics-and-queueing-theory>