Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 15, No. 4 (2025) 433–447.

Paper Type: Original Article

The Estimation of Process Standard Deviation in Statistical Quality Control: A Review and Comparison of Methods

Mahdi Kalantari[1,*], Hormoz Rahmatan[2]

[1] Department of Statistics, Faculty of Science, Payame Noor University, Tehran, Iran; kalantarimahdi@pnu.ac.ir.
[2] Department of Mathematics, Faculty of Science, Payame Noor University, Tehran, Iran; h_rahmatan@pnu.ac.ir.

Citation:

Received: 26 September 2024 *Revised: 04 February 2025* *Accepted: 13 March 2025*	Kalantari, M., & Rahmatan, H. (2025). The estimation of process standard deviation in statistical quality control: A review and comparison of methods. *Journal of Quality Engineering and Management,* 15(2), 433-447.

Abstract

Purpose: This paper aims to compare and examine the statistical properties of four common estimators of process standard deviation for grouped data in statistical quality control.

Methodology: To achieve the research objectives, the bias and the Mean Squared Error (MSE) of the estimators will first be presented. Then, the estimators will be compared based on their MSEs.

Findings: It is shown that two estimators out of four estimators belong to two different classes of linear unbiased estimators with the minimum variance. Furthermore, numerical calculations show that the estimator based on the arithmetic mean of the group standard deviations is more efficient than the other estimators.

Originality/Value: Based on the results obtained in this study, it is suggested that for estimating the standard deviation of the process in grouped data, an estimator based on the arithmetic mean of the standard deviations of the groups should be used instead of estimators that are based on the arithmetic mean of the ranges of the groups.

Keywords: Statistical quality control, Process standard deviation, Estimator, Mean squared error, Relative efficiency.

Corresponding Author: kalantarimahdi@pnu.ac.ir

10.48313/jqem.2025.553737.1580

مهندسی و مدیریت کیفیت

www.pqprc.ir

دوره ۱۵، شماره (۴)، (۱۴۰۴)، ۴۴۷-۴۳۳

نوع مقاله: پژوهشی

برآورد انحراف معیار فرآیند در کنترل کیفیت آماری: بررسی و مقایسه روش‌ها

مهدی کلانتری[1,*]، هرمز رحمتان[2]

[1]گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

[2]گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

هدف: هدف این پژوهش، مقایسه و بررسی ویژگی‌های آماری چهار برآوردگر رایج انحراف معیار فرآیند برای داده‌های گروهی در کنترل کیفیت آماری است.

روش‌شناسی پژوهش: در راستای دستیابی به اهداف پژوهش، ابتدا اریبی و میانگین توان دوم خطای[1] برآوردگرها ارایه می‌شود. سپس برآوردگرها بر اساس MSE باهم مقایسه می‌شوند.

یافته‌ها: ثابت می‌شود که دو برآوردگر از چهار برآوردگر، در دو کلاس مختلف از برآوردگرهای نا اریب خطی دارای کمترین واریانس هستند. همچنین با محاسبات عددی نشان داده می‌شود که برآوردگری که بر اساس میانگین حسابی انحراف معیار گروه‌ها ساخته شده است، کارایی بیشتری از سایر برآوردگرها دارد.

اصالت/ارزش‌افزوده علمی: با توجه به نتایج به‌دست آمده در این پژوهش، پیشنهاد می‌شود برای برآورد انحراف معیار فرآیند در داده‌های گروهی، از برآوردگری که بر اساس میانگین حسابی انحراف معیار گروه‌ها ساخته شده است به‌جای برآوردگرهایی که بر اساس میانگین حسابی دامنه‌ی گروه‌ها ساخته شده‌اند، استفاده کرد.

کلیدواژه‌ها: کنترل کیفیت آماری، انحراف معیار فرآیند، برآوردگر، میانگین توان دوم خطا، کارایی نسبی.

۱- مقدمه

نمودار کنترل یکی از ابزارهای هفتگانه کنترل فرآیند آماری[2] است که به‌منظور ارزیابی شرایط تحت کنترل‌بودن فرآیند ازلحاظ آماری، استفاده می‌شود. نظریه عمومی نمودارهای کنترل برای اولین بار توسط والتر شوهارت در دهه ۱۹۲۰ [1] ارایه شد. در این نظریه، نمودار کنترل شامل یک خط مرکز[3] است که مقدار متوسط مشخصه کیفی را در حالت تحت کنترل بودن فرآیند (وقتی‌که فقط خطاهای تصادفی وجود دارند) نشان می‌دهد. همچنین نمودار کنترل دارای دو خط افقی دیگر است که حد کنترل بالا[4] و حد کنترل پایین[5] نامیده می‌شوند. اگر فرض کنیم که مشخصه کیفی موردنظر به‌وسیله آماره‌ی W اندازه‌گیری می‌شود، آنگاه خط مرکز و حدود کنترل بالا و پایین به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

[1] Mean Squared Error (MSE)
[2] Statistical Process Control (SPC)
[3] Center Line (CL)
[4] Upper Control Limit (UCL)
[5] Lower Control Limit (LCL)

$$UCL = \mu_W + k\sigma_W.$$
$$CL = \mu_W.$$
$$LCL = \mu_W - k\sigma_W, \quad (۱)$$

که در آن μ_W و σ_W به‌ترتیب برابر با میانگین و انحراف معیار آماره W بوده و k نیز نشان‌دهنده فاصله حدود کنترل بالا و پایین از خط مرکز برحسب واحد انحراف معیار است و معمولا برابر با ۳ انتخاب می‌شود [2]. نمودارهای کنترلی که برای محاسبه خط مرکز و حدود کنترل بالا و پایین آن‌ها از **رابطه (۱)** استفاده شود، نمودارهای کنترل شوهارت نامیده می‌شوند.

در کنترل کیفیت آماری معمولا فرض می‌شود که مشخصه کیفی متغیر (مشخصه کیفی که از نوع پیوسته باشد، مثل طول، وزن و حجم)، از توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ پیروی می‌کند. پارامترهای μ و σ به‌ترتیب، میانگین و انحراف معیار فرآیند نامیده می‌شوند. معمولا در عمل مقادیر μ و σ نامعلوم هستند. بنابراین، آن‌ها را باید با استفاده از نمونه‌های تصادفی که در زمان تحت کنترل بودن فرآیند تهیه شده‌اند، برآورد کرد. برای این منظور تعداد m نمونه مستقل که هرکدام شامل n مشاهده است، از فرآیند خط تولید تهیه می‌گردد. هر یک از این m نمونه مستقل، یک زیرگروه نامیده شده و مقدار n نیز اندازه نمونه یا اندازه زیرگروه نامیده می‌شود. μ به‌وسیله آماره زیر برآورد می‌شود:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_i, \quad (۲)$$

که در آن $\bar{X}_i$ میانگین گروه ith است. این آماره دارای ویژگی‌های آماری مطلوبی است؛ از جمله می‌توان گفت $\bar{\bar{X}}$ یک برآوردگر نا اریب با کمترین واریانس به‌طور یکنواخت[1] و یک آماره بسنده مینیمال کامل و نیز برآوردگری سازگار برای μ است [2]؛ ولی مساله اصلی و مهم، برآورد σ است.

حدود کنترل بسیاری از نمودارهای کنترل شوهارت به انحراف معیار فرآیند (σ) بستگی دارد. به‌عنوان‌مثال در نمودار کنترل $\bar{X}$ که برای بررسی تحت کنترل بودن میانگین فرآیند (μ) استفاده می‌شود، خط مرکز و حدود کنترل بالا و پایین عبارت‌اند از:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$
$$CL = \bar{\bar{X}}.$$
$$UCL = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (۳)$$

رابطه (۳) به‌وضوح نشان می‌دهد که حدود کنترل بالا و پایین نمودار $\bar{X}$، بستگی به انحراف معیار فرآیند (σ) داشته و به‌منظور محاسبه آن‌ها نیاز به برآورد σ داریم. به‌طور مشابه، خط مرکز و حدود کنترل بالا و پایین نمودارهای کنترل R و S که برای بررسی تحت کنترل بودن تغییرپذیری فرآیند استفاده می‌شوند نیز، بستگی به انحراف معیار فرآیند (σ) دارند [2]. همچنین در مبحث تجزیه‌وتحلیل کارایی فرآیند[2] نیز نیاز به برآورد انحراف معیار فرآیند داریم [3]. ولی در عمل انحراف معیار معلوم نیست و باید آن را با استفاده از نمونه‌های تصادفی که در زمان تحت کنترل بودن فرآیند تهیه شده‌اند، برآورد کرد؛ بنابراین برآورد انحراف معیار فرآیند از اهمیت ویژه‌ای در مباحث کنترل کیفیت آماری برخوردار است.

---

[1] Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator (UMVUE)

[2] Process Capability (PC)

هدف این مقاله، بررسی و مقایسه چهار برآوردگر رایج و پرکاربرد در کنترل کیفیت آماری است که برای برآورد انحراف معیار فرآیند (σ) با استفاده از زیرگروه‌ها به‌کار می‌روند. این برآوردگرها عبارت‌اند از $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ، $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ، $\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ و $\frac{\bar{S}}{c_4}$. برای مقایسه این برآوردگرها از MSE استفاده خواهیم کرد. نتیجه این بررسی مقایسه‌ای می‌تواند برای پژوهشگران و همچنین کاربرانی که در صنایع مختلف از روش‌های کنترل کیفیت آماری برای بهبود کیفیت تولیدات خود استفاده می‌کنند، مفید واقع شود. نوآوری‌های این پژوهش را می‌توان در چهار دسته ذیل خلاصه کرد:

۱. ثابت می‌کنیم برآوردگر $\frac{\bar{R}}{d_2}$ در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی برای σ بر اساس دامنه تغییرات، کمترین واریانس را دارد.

۲. ثابت می‌کنیم که به ازای هر m و n، برآوردگر $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ، MSE کمتری از برآوردگر $\frac{\bar{R}}{d_2}$ دارد.

۳. ثابت می‌کنیم برآوردگر $\frac{\bar{S}}{c_4}$ در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی برای σ بر اساس انحراف معیار، کمترین واریانس را دارد.

۴. با توجه به بررسی به‌عمل آمده تا زمان نگارش این مقاله، تاکنون مقایسه جامعی در مورد MSE برآوردگرهای $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ، $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ، $\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ و $\frac{\bar{S}}{c_4}$ صورت نگرفته است. مقایسه MSE این برآوردگرها که می‌تواند در انتخاب برآوردگر مناسب برای برآورد انحراف معیار فرآیند مفید واقع شود؛ یکی از اهداف این پژوهش است.

در بخش ۲، ابتدا پیشینه مطالعات قبلی بیان شده و سپس مبانی نظری پژوهش و ویژگی‌های آماری چهار برآوردگر موردنظر، مثل اریبی و MSE، بررسی می‌شوند. در بخش ۳، کارایی این برآوردگرها در برآورد انحراف معیار فرآیند، بر اساس معیار MSE باهم مقایسه شده و درنهایت مناسب‌ترین برآوردگر پیشنهاد می‌شود. در بخش ۴، یک مثال واقعی برای درک بهتر در مورد نحوه برآورد انحراف معیار فرآیند با استفاده از برآوردگرهای مذکور ارایه شده است. در بخش ۵ نیز یافته‌های پژوهش به‌صورت خلاصه مرور شده و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی ارایه شده است. به اثبات قضیه‌های مطرح‌شده در این مقاله نیز می‌توان در بخش پیوست دست یافت.

۲- مرور ادبیات پژوهش

در کنترل کیفیت آماری، برآورد انحراف معیار فرآیند (σ) به‌عنوان معیاری از تغییرپذیری ذاتی فرآیند، از اهمیت بنیادینی برخوردار است؛ زیرا همان‌طور که در بخش مقدمه بیان شد، حدود کنترل بسیاری از نمودارهای کنترل شوهارت مثل $\bar{X}$ ، R و S به انحراف معیار فرآیند بستگی دارند. همچنین شاخص‌های قابلیت فرآیند نظیر C_p و C_{pk} که توانایی یک فرآیند در تولید محصولات قابل‌قبول بر اساس مشخصات از قبل تعیین‌شده را اندازه‌گیری می‌کنند، وابسته به انحراف معیار فرآیند هستند [3]. در عمل مقدار σ مجهول است؛ بنابراین، آن را باید با استفاده از نمونه‌های تصادفی که در زمان تحت کنترل بودن فرآیند تهیه شده‌اند، برآورد کرد. یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای برآورد σ استفاده از داده‌های گروهی است. به‌عبارت‌دیگر، تعداد m نمونه مستقل که هرکدام شامل n مشاهده است، از فرآیند خط تولید تهیه می‌گردد. همان‌طور که قبلا اشاره شد، به هر یک از این m نمونه مستقل، یک زیرگروه گویند و مقدار n نیز اندازه نمونه یا اندازه زیرگروه نامیده می‌شود.

۲-۱- پیشینه مطالعات قبلی

فرض کنید m زیرگروه هر یک به‌اندازه n از فرآیند تولیدی که بنا به فرض دارای توزیع نرمال با انحراف معیار σ است، در زمان تحت کنترل بودن آن انتخاب شده باشد. دامنه زیرگروه ith را با R_i نشان داده و برابر با تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مشاهده زیرگروه ith تعریف می‌شود. به‌عبارت‌دیگر $R_i = X_{max,i} - X_{min,i}$. میانگین حسابی دامنه‌ها را نیز با $\bar{R}$ نشان می‌دهند، یعنی $\bar{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i$. پیرسون در [4] نشان داد که $E(R_i) = d_2\sigma$ و $Var(R_i) = d_3^2\sigma^2$. d_2 و d_3 ضرایبی هستند که مقدار آن‌ها بستگی به‌اندازه نمونه n داشته و تقریبا در همه متون کنترل کیفیت آماری نظیر [5]، می‌توان جدول‌های مربوط به آن‌ها را یافت.

میانگین حسابی و انحراف معیار زیرگروه ith را به ترتیب با $\bar{x}_i$ و S_i نشان داده و به‌صورت $\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ و $S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}$ تعریف می‌شوند، وقتی‌که x_{ij} نشان‌دهنده jth مشاهده از ith زیرگروه است. میانگین حسابی انحراف معیارهای زیرگروه‌ها نیز با نماد $\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i$ نشان داده می‌شود. می‌دانیم که $E(S_i) = c_4\sigma$ ، وقتی‌که $c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ [6].

لوکو در [7] به‌صورت عددی و به ازای برخی مقادیر m و n نشان داد که برآوردگر $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ، MSE کمتری از برآوردگر $\frac{\bar{R}}{d_2}$ دارد، وقتی‌که $d_2^* = \sqrt{d_2^2 + \frac{d_3^2}{m}}$ وودال و مونتگومری در [8] برآوردگر $\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ را معرفی کردند که در کلاس برآوردگرهایی به شکل $c\bar{R}$ $(c>0)$ ، دارای کمترین MSE در برآورد σ است. آن‌ها درصد کاهش در MSE در اثر به‌کار بردن برآوردگر $\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ به‌جای $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ برای برآورد σ را به ازای $m = 1,2,3,4,5,7,10,15,20$ و $n = 2,\ldots,10$ محاسبه کردند و نشان دادند که اگر مقادیر m و n هر دو کوچک باشند، درصد کاهش در MSE در حد متوسط است؛ ولی با افزایش مقادیر m و n، درصد کاهش در MSE نزولی می‌شود. محمود و همکاران در [9] با استفاده از محاسبات عددی نشان دادند که برآوردگر $\frac{\bar{S}}{c_4}$ در مقایسه با برآوردگر $c_4\bar{S}$ از MSE کمتری برخوردار است. همچنین آن‌ها به‌صورت عددی نشان دادند که MSE برآوردگر $\frac{\bar{S}}{c_4}$ کمتر از MSE برآوردگر $\frac{\bar{R}}{d_2}$ است. با توجه به بررسی به‌عمل آمده تا زمان نگارش این مقاله، تاکنون مقایسه جامعی در مورد MSE برآوردگرهای $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ، $\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ، $\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ و $\frac{\bar{S}}{c_4}$ صورت نگرفته است.

۲-۲- مبانی نظری تحقیق

در این بخش، چهار برآوردگر رایج انحراف معیار فرآیند که به‌طور گسترده در کنترل کیفیت آماری استفاده می‌شوند، معرفی می‌شوند. ویژگی‌های آماری و MSE آن‌ها در قالب چهار قضیه بیان شده است. اثبات قضیه‌ها نیز در بخش پیوست ارایه شده است. ابتدا تعاریف مربوط به نا اریبی و MSE را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱ – برآوردگر $\hat{\sigma}$ را نا اریب برای σ نامند هرگاه به ازای هر مقدار σ داشته باشیم $E(\hat{\sigma}) = \sigma$.

نا اریبی بدین معنی است که متوسط خطای برآوردگر نا اریب برابر با صفر است. به همین دلیل نا اریبی یک ویژگی مطلوب برای یک برآوردگر محسوب می‌شود.

تعریف ۲ – MSE برآوردگر $\hat{\sigma}$ در برآورد پارامتر مجهول σ ، با نماد $MSE(\hat{\sigma})$ نشان داده شده و به‌صورت $MSE(\hat{\sigma}) = E(\hat{\sigma} - \sigma)^2$ تعریف می‌شود.

MSE، یک معیار رایج برای اندازه‌گیری میزان دقت یک برآوردگر بوده و هرچقدر مقدار کمتری داشته باشد، نشانگر دقت بالای برآوردگر است. از این معیار می‌توان برای مقایسه برآوردگرهای مختلف استفاده کرد.

رایج‌ترین برآوردگری که به‌طور گسترده در کنترل کیفیت آماری برای برآورد تغییرپذیری فرآیند (σ)، تعیین حدود کنترل سه سیگمای نمودار $\bar{X}$ و R و همچنین ارزیابی کارایی فرآیند، به‌کاربرده می‌شود؛ برآوردگر $\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2}$ است. در **قضیه ۱** ثابت کرده‌ایم که این برآوردگر در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی بر اساس دامنه زیرگروه‌ها (R_i ها)، کمترین واریانس را دارد. اثبات این قضیه در بخش پیوست ارایه شده است.

قضیه ۱

۱. برآوردگر $\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2}$ در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی برای σ بر اساس R_i ها، کمترین واریانس را دارد.

۲. $MSE(\hat{\sigma}_1) = Var(\hat{\sigma}_1) = \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{m}$ و اگر $m \to \infty$ آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_1) \to 0$.

دومین برآوردگر بر اساس دامنه زیرگروه‌ها به‌صورت $\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2^*}$ است، وقتی‌که $d_2^* = \sqrt{d_2^2 + \frac{d_3^2}{m}}$. این برآوردگر اغلب در نمونه‌گیری برای پذیرش و مطالعات مربوط به تکرارپذیری و بازتولیدپذیری ($R\&R$) ابزار اندازه‌گیری به‌کار می‌رود [7]. $R\&R$ معمولا درزمینه کنترل کیفیت و ارزیابی دقت و قابلیت اعتماد ابزارهای اندازه‌گیری مورداستفاده قرار می‌گیرند. تکرارپذیری به توانایی یک ابزار در ارایه نتایج مشابه در شرایط یکسان اشاره دارد، درحالی‌که بازتولیدپذیری به توانایی آن در ارایه نتایج مشابه در شرایط مختلف و توسط افراد متفاوت اشاره می‌کند. همان‌طور قبلا در بخش ۲-۱ اشاره شد، لوکو در [7] به‌صورت عددی و به ازای برخی مقادیر m و n نشان داد که برآوردگر $\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2^*}$ ، MSE کمتری از برآوردگر $\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2}$ دارد. ما در **قضیه ۲** ویژگی‌های برآوردگر $\hat{\sigma}_2$ را بیان کرده و ثابت کرده‌ایم، به ازای هر مقدار از m و n، برآوردگر $\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2^*}$ MSE کمتری از برآوردگر $\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2}$ دارد. توجه داشته باشید که $\hat{\sigma}_2$ نا اریب برای σ نیست ولی کاراتر از $\hat{\sigma}_1$ است. اثبات این قضیه در بخش پیوست ارایه شده است.

قضیه ۲

۱. برآوردگر $\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2^*}$ دارای اریبی منفی است (یعنی $E(\hat{\sigma}_2) < \sigma$) و اگر $m \to \infty$ آنگاه اریبی آن به مقدار صفر میل خواهد کرد.

۲. برآوردگر $\hat{\sigma}_2^2$ نا اریب برای σ^2 است.

۳. $MSE(\hat{\sigma}_2) = 2\sigma^2\left(1 - \frac{d_2}{d_2^*}\right)$ و اگر $m \to \infty$ آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_2) \to 0$.

۴. $\hat{\sigma}_2$ کاراتر از $\hat{\sigma}_1$ است، بدین معنی که $MSE(\hat{\sigma}_2) < MSE(\hat{\sigma}_1)$.

وودال و مونتگومری در [8] برآوردگر دیگری را بر اساس دامنه زیرگروه‌ها ارایه دادند که دارای خاصیت بهینه است، بدین معنی که در میان تمام برآوردگرهایی به شکل $c\bar{R}$ $(c>0)$ دارای کمترین MSE است. این برآوردگر به‌صورت $\hat{\sigma}_3 = \frac{d_2}{(d_2^*)^2}\bar{R}$ است. در **قضیه ۳** ویژگی‌های $\hat{\sigma}_3$ بیان شده و اثبات آن در مرجع [8] ارایه شده است.

قضیه ۳

۱. در میان تمام برآوردگرهایی به شکل $c\bar{R}$ $(c>0)$ ، برآوردگر $\hat{\sigma}_3 = \frac{d_2}{(d_2^*)^2}\bar{R}$ دارای کمترین MSE در برآورد σ است.

۲. $MSE(\hat{\sigma}_3) = \sigma^2\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)^2\right]$ و اگر $m \to \infty$ آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_3) \to 0$.

به‌راحتی می‌توان نشان داد که برآوردگر $\hat{\sigma}_3 = \frac{d_2}{(d_2^*)^2}\bar{R}$ دارای اریبی منفی است (یعنی $E(\hat{\sigma}_3) < \sigma$) و اگر $m \to \infty$ آنگاه اریبی آن به مقدار صفر میل خواهد کرد. همچنین می‌توان نشان داد که اریبی $\hat{\sigma}_3 = \frac{d_2}{(d_2^*)^2}\bar{R}$ کمتر از $\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2^*}$ است.

یکی دیگر از برآوردگرهایی که به‌طور گسترده در برآورد تغییرپذیری فرآیند، تعیین حدود کنترل سه سیگمای نمودار $\bar{X}$ و S و ارزیابی کارایی فرآیند، به‌کار برده می‌شود؛ برآوردگر $\hat{\sigma}_4 = \frac{\bar{S}}{c_4}$ است؛ وقتی‌که $\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i$ برابر با میانگین حسابی انحراف معیارهای زیرگروه‌ها بوده و S_i نشان‌دهنده انحراف معیار زیرگروه ith است و $c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$. در **قضیه ۴** ثابت کرده‌ایم که این برآوردگر در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی بر اساس انحراف معیارهای زیرگروه‌ها (S_i ها)، کمترین واریانس را دارد. اثبات این قضیه در بخش پیوست ارایه شده است.

قضیه ۴

۱. برآوردگر $\hat{\sigma}_4 = \frac{\bar{S}}{c_4}$ در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی برای σ بر اساس S_i ها، کمترین واریانس را دارد.

۲. $MSE(\hat{\sigma}_4) = Var(\hat{\sigma}_4) = \frac{\sigma^2(1-c_4^2)}{mc_4^2}$ و اگر $m \to \infty$ آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_4) \to 0$.

در **جدول ۱**، به‌صورت خلاصه چهار برآوردگر معرفی‌شده در این بخش همراه با میانگین و MSE آن‌ها ارایه شده است.

جدول ۱- چهار برآوردگر انحراف معیار به همراه میانگین و MSE آن‌ها.

Table 1- Four standard deviation coefficients from their average and MSE.

$\hat{\sigma}$	$E(\hat{\sigma})$	$MSE(\hat{\sigma})$
$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2}$	σ	$\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{m}$
$\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2^*}$	$\left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)\sigma$	$2\sigma^2\left(1-\frac{d_2}{d_2^*}\right)$
$\hat{\sigma}_3 = \frac{d_2}{(d_2^*)^2}\bar{R}$	$\left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)^2\sigma$	$\sigma^2\left[1-\left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)^2\right]$
$\hat{\sigma}_4 = \frac{\bar{S}}{c_4}$	σ	$\frac{\sigma^2(1-c_4^2)}{mc_4^2}$

۳- مقایسه برآوردگرهای انحراف معیار

در این بخش، چهار برآوردگر انحراف معیار فرآیند که در بخش ۲ معرفی شدند، بر اساس معیار MSE مقایسه خواهند شد. توجه داشته باشد که هر سه برآوردگر $\hat{\sigma}_1$، $\hat{\sigma}_2$ و $\hat{\sigma}_3$ متعلق به کلاس برآوردگرهایی به شکل $c\bar{R}$ $(c>0)$ هستند؛ بنابراین طبق **قضیه ۳** داریم $MSE(\hat{\sigma}_3) < MSE(\hat{\sigma}_1)$ و $MSE(\hat{\sigma}_3) < MSE(\hat{\sigma}_2)$.

از طرفی طبق قسمت ۴ **قضیه ۲** داریم $MSE(\hat{\sigma}_2) < MSE(\hat{\sigma}_1)$، بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $MSE(\hat{\sigma}_3) < MSE(\hat{\sigma}_2) < MSE(\hat{\sigma}_1)$. درنتیجه کافی است فقط MSE برآوردگر $\hat{\sigma}_4$ با MSE سایر برآوردگرها مقایسه شود. به‌منظور سهولت در انجام مقایسه‌ها، از کارایی نسبی برآوردگرها که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۳- کارایی نسبی برآوردگر T_1 نسبت به برآوردگر T_2 را با $e(T_1,T_2)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$e(T_1,T_2)=\frac{MSE(T_2)}{MSE(T_1)}. \qquad (۴)$$

اگر $e(T_1,T_2)>1$ باشد دو برآوردگر کارایی $e(T_1,T_2)=1$ است. درصورتی‌که T_1 کاراتر از T_2 آنگاه $e(T_1,T_2)<1$ است و اگر T_2 کاراتر از T_1 آنگاه یکسانی دارند. کارایی نسبی برآوردگر $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$ نسبت به برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ به‌صورت زیر است:

$$e(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_4)=\frac{MSE(\hat{\sigma}_4)}{MSE(\hat{\sigma}_1)}=\frac{\frac{\sigma^2\left(1-c_4^2\right)}{mc_4^2}}{\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2\frac{\sigma^2}{m}}=\frac{1-c_4^2}{c_4^2\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2}. \qquad (۵)$$

مقدار $e(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_4)$ فقط بستگی به‌اندازه نمونه n دارد. این مقادیر به ازای اندازه نمونه ۲ تا ۲۵، در **جدول ۲** ارایه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تمام مقادیر کارایی نسبی کمتر از یک هستند و با افزایش اندازه نمونه، این مقادیر کاهش می‌یابند؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ کاراتر از برآوردگر $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$ است و با افزایش اندازه نمونه، کارایی $\hat{\sigma}_4$ نسبت به $\hat{\sigma}_1$ افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که با استفاده از مقادیر کارایی نسبی می‌توان درصد کاهش در MSE را محاسبه کرد. به‌عنوان‌مثال، اگر یک نمونه ۲۵تایی انتخاب کرده و از $\hat{\sigma}_4$ به‌جای $\hat{\sigma}_1$ برای برآورد انحراف معیار فرآیند استفاده کنیم، آنگاه $(1-0.657)\times 100=34.3$ درصد، کاهش در MSE خواهیم داشت.

جدول ۲- مقادیر $e(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_4)$.

Table 2- Values $e(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_4)$.

اندازه نمونه (n)	$e(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_4)$	اندازه نمونه (n)	$e(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_4)$
2	0.998	14	0.798
3	0.993	15	0.781
4	0.975	16	0.766
5	0.955	17	0.751
6	0.933	18	0.738
7	0.911	19	0.724
8	0.889	20	0.711
9	0.869	21	0.700
10	0.850	22	0.689
11	0.832	23	0.678
12	0.814	24	0.667
13	0.998	25	0.657

کارایی نسبی برآوردگر $\hat{\sigma}_2=\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ نسبت به برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ به‌صورت زیر است:

$$e(\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_4)=\frac{MSE(\hat{\sigma}_4)}{MSE(\hat{\sigma}_2)}=\frac{\frac{\sigma^2\left(1-c_4^2\right)}{mc_4^2}}{2\sigma^2\left(1-\frac{d_2}{d_2^*}\right)}=\frac{1-c_4^2}{2mc_4^2\left(1-\frac{d_2}{d_2^*}\right)}. \qquad (۶)$$

مقدار $e(\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_4)$ بستگی به m و n دارد. این مقادیر به ازای تعداد زیرگروه‌های ۱ تا ۲۰ و اندازه نمونه ۲ تا ۲۵، در **جدول ۳** ارایه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر اندازه نمونه بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد آنگاه به‌غیراز چند مورد محدود مثل $m=1,2$ و $n=5$، تمام مقادیر کارایی نسبی کمتر از یک هستند و با افزایش تعداد زیرگروه‌ها و اندازه نمونه، این مقادیر کاهش می‌یابند؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که اگر اندازه نمونه بزرگ‌تر یا

مساوی ۴ باشد آنگاه برآوردگر $\hat{\sigma}_4 = \dfrac{\bar{S}}{c_4}$ کاراتر از برآوردگر $\hat{\sigma}_2 = \dfrac{\bar{R}}{d_2^*}$ است (به‌جز چند حالت محدود) و با افزایش تعداد زیرگروه‌ها و اندازه نمونه، کارایی $\hat{\sigma}_4$ نسبت به $\hat{\sigma}_2$ افزایش می‌یابد.

جدول ۳- مقادیر $e(\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_4)$.

Table 3- Values $e(\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_4)$.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	m / n
1.041	1.045	1.051	1.059	1.069	1.083	1.104	1.139	1.208	1.410	2
1.014	1.016	1.019	1.022	1.027	1.034	1.044	1.061	1.095	1.194	3
0.988	0.990	0.992	0.994	0.997	1.002	1.008	1.019	1.041	1.107	4
0.965	0.966	0.967	0.969	0.971	0.975	0.980	0.988	1.004	1.053	5
0.941	0.942	0.943	0.944	0.946	0.948	0.952	0.959	0.972	1.010	6
0.918	0.919	0.920	0.921	0.922	0.924	0.928	0.933	0.944	0.976	7
0.895	0.896	0.896	0.897	0.899	0.901	0.903	0.908	0.917	0.944	8
0.874	0.874	0.875	0.876	0.877	0.879	0.881	0.885	0.893	0.917	9
0.855	0.855	0.856	0.856	0.857	0.859	0.861	0.865	0.872	0.893	10
0.836	0.836	0.837	0.837	0.838	0.840	0.842	0.845	0.851	0.870	11
0.818	0.818	0.819	0.819	0.820	0.821	0.823	0.826	0.832	0.849	12
0.801	0.801	0.802	0.802	0.803	0.804	0.806	0.808	0.814	0.829	13
0.784	0.784	0.785	0.785	0.786	0.787	0.788	0.791	0.796	0.810	14
0.769	0.769	0.770	0.770	0.771	0.772	0.773	0.775	0.780	0.793	15
0.754	0.754	0.754	0.755	0.755	0.756	0.758	0.760	0.764	0.776	16
0.740	0.740	0.741	0.741	0.742	0.743	0.744	0.746	0.750	0.761	17
0.726	0.726	0.727	0.727	0.727	0.728	0.729	0.731	0.735	0.746	18
0.713	0.713	0.714	0.714	0.715	0.715	0.716	0.718	0.722	0.732	19
0.702	0.702	0.702	0.702	0.703	0.704	0.705	0.706	0.710	0.720	20
0.691	0.691	0.691	0.692	0.692	0.693	0.694	0.695	0.699	0.708	21
0.679	0.680	0.680	0.680	0.681	0.681	0.682	0.684	0.687	0.696	22
0.669	0.669	0.669	0.670	0.670	0.671	0.671	0.673	0.676	0.684	23
0.659	0.659	0.660	0.660	0.660	0.661	0.662	0.663	0.666	0.674	24
0.650	0.651	0.651	0.651	0.651	0.652	0.653	0.654	0.657	0.665	25

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	m / n
1.020	1.021	1.022	1.023	1.025	1.027	1.029	1.031	1.034	1.037	2
1.003	1.004	1.005	1.005	1.006	1.007	1.008	1.009	1.010	1.012	3
0.982	0.982	0.982	0.983	0.983	0.984	0.985	0.985	0.986	0.987	4
0.960	0.960	0.960	0.961	0.961	0.962	0.962	0.963	0.963	0.964	5
0.937	0.937	0.937	0.937	0.938	0.938	0.938	0.939	0.939	0.940	6
0.915	0.915	0.915	0.915	0.915	0.916	0.916	0.916	0.917	0.917	7
0.892	0.892	0.893	0.893	0.893	0.893	0.893	0.894	0.894	0.894	8
0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.873	0.873	0.873	0.873	9
0.852	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.854	0.854	0.854	10
0.834	0.834	0.834	0.834	0.834	0.835	0.835	0.835	0.835	0.835	11
0.816	0.816	0.816	0.816	0.817	0.817	0.817	0.817	0.817	0.818	12
0.799	0.799	0.799	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.801	13
0.782	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.784	14
0.768	0.768	0.768	0.768	0.768	0.768	0.768	0.768	0.769	0.769	15
0.752	0.752	0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	16
0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739	0.740	0.740	0.740	17
0.725	0.725	0.725	0.725	0.725	0.725	0.725	0.725	0.726	0.726	18
0.712	0.712	0.712	0.712	0.712	0.713	0.713	0.713	0.713	0.713	19
0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	20
0.690	0.690	0.690	0.690	0.690	0.690	0.690	0.690	0.691	0.691	21
0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	22
0.668	0.668	0.668	0.668	0.668	0.668	0.668	0.668	0.669	0.669	23
0.658	0.658	0.658	0.658	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	24
0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	25

کارایی نسبی برآوردگر $\hat{\sigma}_3 = \dfrac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ نسبت به برآوردگر $\hat{\sigma}_4 = \dfrac{\bar{S}}{c_4}$ به‌صورت زیر است:

$$e(\hat{\sigma}_3,\hat{\sigma}_4) = \frac{MSE(\hat{\sigma}_4)}{MSE(\hat{\sigma}_3)} = \frac{\dfrac{\sigma^2\left(1-c_4^2\right)}{mc_4^2}}{\sigma^2\left[1-\left(\dfrac{d_2}{d_2^*}\right)^2\right]} = \frac{1-c_4^2}{mc_4^2\left[1-\left(\dfrac{d_2}{d_2^*}\right)^2\right]}. \qquad (۷)$$

مقدار $e(\hat{\sigma}_3,\hat{\sigma}_4)$ بستگی به m و n دارد. این مقادیر به ازای تعداد زیرگروه‌های ۱ تا ۲۰ و اندازه نمونه ۲ تا ۲۵، در **جدول ۴** ارایه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اگر اندازه نمونه بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد آنگاه به‌غیراز چند مورد محدود مثل $m=1,2$ و $n=5$، تمام مقادیر کارایی نسبی کمتر از یک هستند و با افزایش تعداد زیرگروه‌ها و اندازه نمونه، این مقادیر کاهش می‌یابند؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر اندازه نمونه بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد آنگاه برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ کاراتر از برآوردگر $\hat{\sigma}_3=\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ است (به‌جز چند حالت محدود) و با افزایش تعداد زیرگروه‌ها و اندازه نمونه، کارایی $\hat{\sigma}_4$ نسبت به $\hat{\sigma}_3$ افزایش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان گفت که درمجموع، برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ کاراتر از برآوردگرهای $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$، $\hat{\sigma}_2=\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ و $\hat{\sigma}_3=\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ است.

جدول ۴- مقادیر $e(\hat{\sigma}_3,\hat{\sigma}_4)$.

Table 4- Values $e(\hat{\sigma}_3,\hat{\sigma}_4)$.

10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**m / n**
1.055	1.062	1.070	1.080	1.093	1.112	1.141	1.188	1.284	1.569	2
1.021	1.024	1.027	1.032	1.039	1.048	1.061	1.084	1.130	1.266	3
0.993	0.995	0.997	1.000	1.005	1.011	1.020	1.034	1.064	1.153	4
0.968	0.970	0.971	0.974	0.977	0.981	0.988	0.999	1.021	1.087	5
0.943	0.944	0.946	0.948	0.950	0.954	0.959	0.968	0.985	1.037	6
0.920	0.921	0.922	0.924	0.926	0.929	0.933	0.940	0.955	0.998	7
0.897	0.898	0.899	0.900	0.902	0.904	0.908	0.914	0.926	0.963	8
0.876	0.876	0.877	0.878	0.880	0.882	0.885	0.891	0.901	0.933	9
0.856	0.857	0.857	0.858	0.860	0.862	0.865	0.869	0.879	0.907	10
0.837	0.838	0.838	0.839	0.841	0.842	0.845	0.849	0.858	0.883	11
0.819	0.820	0.820	0.821	0.822	0.824	0.826	0.830	0.838	0.861	12
0.802	0.802	0.803	0.804	0.805	0.806	0.808	0.812	0.819	0.840	13
0.785	0.785	0.786	0.787	0.788	0.789	0.791	0.794	0.801	0.820	14
0.770	0.770	0.771	0.771	0.772	0.774	0.775	0.778	0.784	0.803	15
0.755	0.755	0.755	0.756	0.757	0.758	0.760	0.762	0.768	0.785	16
0.741	0.741	0.742	0.742	0.743	0.744	0.746	0.748	0.754	0.770	17
0.727	0.727	0.727	0.728	0.729	0.730	0.731	0.734	0.739	0.754	18
0.714	0.714	0.715	0.715	0.716	0.717	0.718	0.721	0.725	0.739	19
0.702	0.703	0.703	0.703	0.704	0.705	0.706	0.709	0.713	0.726	20
0.692	0.692	0.692	0.693	0.693	0.694	0.695	0.697	0.702	0.714	21
0.680	0.680	0.681	0.681	0.682	0.682	0.684	0.686	0.690	0.702	22
0.669	0.670	0.670	0.670	0.671	0.672	0.673	0.675	0.679	0.690	23
0.660	0.660	0.660	0.661	0.661	0.662	0.663	0.665	0.668	0.679	24
0.651	0.651	0.651	0.652	0.652	0.653	0.654	0.656	0.659	0.670	25
20	**19**	**18**	**17**	**16**	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**m / n**
1.027	1.028	1.030	1.032	1.034	1.036	1.039	1.042	1.046	1.050	2
1.007	1.008	1.008	1.009	1.010	1.011	1.013	1.014	1.016	1.018	3
0.984	0.984	0.985	0.985	0.986	0.987	0.988	0.989	0.990	0.991	4
0.962	0.962	0.962	0.963	0.963	0.964	0.964	0.965	0.966	0.967	5
0.938	0.938	0.939	0.939	0.939	0.940	0.940	0.941	0.942	0.942	6
0.916	0.916	0.916	0.917	0.917	0.917	0.918	0.918	0.919	0.919	7
0.893	0.893	0.894	0.894	0.894	0.894	0.895	0.895	0.896	0.896	8
0.872	0.872	0.873	0.873	0.873	0.873	0.874	0.874	0.874	0.875	9
0.853	0.853	0.853	0.854	0.854	0.854	0.854	0.855	0.855	0.855	10
0.835	0.835	0.835	0.835	0.835	0.835	0.836	0.836	0.836	0.837	11
0.817	0.817	0.817	0.817	0.817	0.817	0.818	0.818	0.818	0.819	12
0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.801	0.801	0.801	0.801	0.802	13
0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.784	0.784	0.784	0.784	0.785	14
0.768	0.768	0.768	0.768	0.769	0.769	0.769	0.769	0.769	0.770	15
0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	0.753	0.754	0.754	0.754	0.754	16
0.739	0.739	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.741	17
0.725	0.725	0.725	0.725	0.726	0.726	0.726	0.726	0.726	0.726	18
0.713	0.713	0.713	0.713	0.713	0.713	0.713	0.713	0.713	0.714	19
0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.701	0.702	0.702	0.702	0.702	20
0.690	0.690	0.690	0.691	0.691	0.691	0.691	0.691	0.691	0.691	21
0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679	0.680	0.680	22
0.668	0.668	0.668	0.669	0.669	0.669	0.669	0.669	0.669	0.669	23
0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	0.659	24
0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.650	0.651	0.651	25

۴- مثال واقعی

در این بخش، به‌منظور درک بهتر نحوه استفاده از چهار برآوردگر معرفی‌شده برای برآورد انحراف معیار فرآیند با استفاده از داده‌های گروهی، از یک مثال واقعی استفاده شده است. داده‌های این مثال که از مرجع [2] انتخاب شده‌اند، در **جدول ۵** نشان داده شده‌اند (ستون‌های دوم تا ششم). این داده‌ها حاصل اندازه‌گیری بعد بحرانی یک قطعه تولیدشده توسط یک فرآیند ماشین‌کاری هستند که در قالب ۲۰ نمونه ۵تایی جمع آوری شده‌اند.

جدول ۵- بعد بحرانی یک قطعه.
Table 5- Critical dimension of a piece.

انحراف معیار	دامنه					مشاهده‌ها	شماره زیرگروه
12.10	27.9	125.4	137.4	138.7	110.8	138.1	1
24.66	57.0	92.30	134.0	105.0	142.1	149.3	2
16.18	39.1	117.4	155.0	124.2	135.6	115.9	3
11.05	30.0	100.2	122.6	130.2	116.5	118.5	4
17.74	42.7	150.9	142.4	117.1	123.8	108.2	5
17.95	43.0	145.8	135.0	135.0	112.0	102.8	6
15.24	36.1	119.3	118.5	112.8	84.30	120.4	7
16.66	46.0	105.1	123.9	124.0	151.1	132.7	8
20.16	47.0	173.2	127.1	154.7	126.2	136.4	9
12.31	33.7	130.4	138.3	149.1	115.4	135.0	10
15.86	40.6	110.5	143.7	151.1	127.9	139.6	11
17.87	39.8	165.1	152.4	130.4	160.2	125.3	12
23.17	50.0	151.8	113.3	149.5	101.8	145.7	13
3.64	9.2	141.1	140.2	131.9	139.0	138.6	14
23.51	55.0	139.6	113.8	165.1	114.6	110.1	15
21.84	53.6	117.3	120.2	154.6	101.0	145.2	16
15.98	42.9	105.0	147.9	121.5	135.3	125.9	17
20.69	53.2	150.5	109.0	130.5	97.30	129.7	18
14.42	38.2	154.2	148.4	161.6	150.0	123.4	19
12.11	32.2	142.7	151.8	119.6	138.3	144.8	20

در این مثال داریم: $m = 20$ ، $n = 5$ ، $d_2 = 2.3259$ ، $d_3 = 0.8641$ ، $d_2^* = 2.333911$ و $c_4 = 0.94$. حال با استفاده از این مقادیر و به‌کارگیری دامنه و انحراف معیار زیرگروه‌ها که به ترتیب در ستون‌های هفتم و هشتم **جدول ۵** درج شده‌اند، می‌توان مقدار برآورد انحراف معیار فرآیند و مقدار MSE / σ^2 را محاسبه کرد. این مقادیر در **جدول ۶** ارایه شده‌اند. همان‌طور که انتظار می‌رود، برآوردگر $\hat{\sigma}_4 = \frac{\bar{S}}{c_4}$ دارای کمترین مقدار MSE / σ^2 است و درنتیجه بهترین عملکرد را در بین سایر برآوردگرهای موردبررسی دارد.

جدول ۶- مقادیر برآورد انحراف معیار فرآیند و MSE / σ^2 .
Table 6- Estimated values of process standard deviation and MSE / σ^2 .

MSE / σ^2	برآورد انحراف معیار فرآیند
0.006900743	$\hat{\sigma}_1 = 17.56739$
0.006865232	$\hat{\sigma}_2 = 17.50709$
0.006853449	$\hat{\sigma}_3 = 17.447$
0.006588424	$\hat{\sigma}_4 = 17.72005$

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، به بررسی و مقایسه چهار برآوردگر رایج در کنترل کیفیت آماری که برای برآورد انحراف معیار فرآیند با استفاده از داده‌های گروهی به کار می‌روند، پرداخته شد. این برآوردگرها عبارت‌اند از $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$، $\hat{\sigma}_2=\frac{\bar{R}}{d_2^*}$، $\hat{\sigma}_3=\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ و $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$. ثابت کردیم که برآوردگر $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$ در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی برای σ بر اساس دامنه زیرگروه‌ها، کمترین واریانس را دارد. همچنین ثابت کردیم که برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ در کلاس برآوردگرهای نا اریب خطی برای σ بر اساس انحراف معیار زیرگروه‌ها، کمترین واریانس را دارد. برای مقایسه چهار برآوردگر از معیار MSE استفاده شد و نشان دادیم که $MSE(\hat{\sigma}_3)<MSE(\hat{\sigma}_2)<MSE(\hat{\sigma}_1)$. در ادامه با محاسبات عددی نشان دادیم که به ازای هراندازه نمونه (n) داریم $MSE(\hat{\sigma}_4)<MSE(\hat{\sigma}_1)$ و با افزایش اندازه نمونه، کارایی $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ نسبت به $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$ افزایش می‌یابد. همچنین محاسبات عددی نشان دادند که اگر اندازه نمونه بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_4)<MSE(\hat{\sigma}_2)$ و $MSE(\hat{\sigma}_4)<MSE(\hat{\sigma}_3)$ و با افزایش تعداد زیرگروه‌ها (m) و اندازه نمونه، کارایی $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ نسبت به برآوردگرهای $\hat{\sigma}_2=\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ و $\hat{\sigma}_3=\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ افزایش می‌یابد. درنتیجه با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان گفت که درمجموع، برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ کاراتر از برآوردگرهای $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$، $\hat{\sigma}_2=\frac{\bar{R}}{d_2^*}$ و $\hat{\sigma}_3=\frac{d_2}{\left(d_2^*\right)^2}\bar{R}$ است؛ بنابراین پیشنهاد می‌شود برای برآورد انحراف معیار فرآیند در داده‌های گروهی، از برآوردگر $\hat{\sigma}_4=\frac{\bar{S}}{c_4}$ به‌جای سایر برآوردگرها استفاده شود.

البته باید یادآوری کنیم که نتایج به‌دست آمده در این مقاله، متکی به فرض نرمال بودن داده‌ها هستند. بررسی ویژگی‌ها و مقایسه برآوردگرهای مذکور در این پژوهش، وقتی‌که فرض نرمال بودن داده‌ها درست نباشد، می‌تواند یک مساله کاربردی برای پژوهش‌های آتی باشد. بررسی و مقایسه برآوردگرهای استوار انحراف معیار فرآیند در مواجهه با مشاهده‌ها دورافتاده را نیز می‌توان به‌عنوان یک موضوع قابل‌تامل برای پژوهش‌های آتی مدنظر قرار داد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی خود را از داوران محترم اعلام می‌دارند، بی‌شک دیدگاه ارزشمند ایشان در بهبود کیفیت مقاله نقش بسزایی داشته است.

منابع مالی

در طول انجام این پژوهش هیچ‌گونه کمک‌هزینه خاصی از هیچ موسسه، سرمایه‌گذار در بخش عمومی، خصوصی، تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نشده است.

تعارض با منافع

هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد و همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال‌شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله اثر اصلی آن‌ها بوده و پیش‌ازاین چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نیست.

منابع

[1] Shewhart, W. A. (1924). Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data. *Bell system technical journal*, *3*(1), 43-87. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1924.tb01347.x

[2] Montgomery, D. C. (2020). *Introduction to statistical quality control*. John wiley & sons. https://www.wiley.com/en-us/Introduction+to+Statistical+Quality+Control%2C+8th+Edition-p-9781119399308
[3] Álvarez, E., Moya-Férnandez, P. J., Blanco-Encomienda, F. J., & Muñoz, J. F. (2015). Methodological insights for industrial quality control management: The impact of various estimators of the standard deviation on the process capability index. *Journal of king saud university-science*, *27*(3), 271-277.
[4] Pearson, E. S. (1932). The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal population (n⩽ 100.). *Biometrika*, *24*(3/4), 404-417. https://doi.org/10.2307/2331974
[5] Gupta, B. C. (2021). *Statistical quality control: Using MINITAB, R, JMP and Python*. John Wiley & Sons. https://www.amazon.com/Statistical-Quality-Control-Bhisham-Gupta/dp/1119671639
[6] Casella, G., & Berger, R. L. (2024). *Statistical inference*. Chapman & Hall/CRC. https://www.routledge.com/link/link/p/book/9781032593036
[7] Luko, S. N. (1996). Concerning the estimators R/d2 And R/d2* in estimating variability in a normal universe. *Quality engineering*, *8*(3), 481-487. https://doi.org/10.1080/08982119608904651
[8] Woodall, W. H., & Montgomery, D. C. (2000). Using ranges to estimate variability. *Quality engineering*, *13*(2), 211-217. https://doi.org/10.1080/08982110108918643
[9] Mahmoud, M. A., Henderson, G. R., Epprecht, E. K., & Woodall, W. H. (2010). Estimating the standard deviation in quality-control applications. *Journal of quality technology*, *42*(4), 348-357. https://doi.org/10.1080/00224065.2010.11917832

پیوست الف

اثبات قضیه‌ها

در این پیوست، اثبات قضیه‌ها ارایه خواهد شد. ابتدا به اثبات لمی می‌پردازیم که در اثبات برخی از قضیه‌ها بسیار راهگشاست.

لم ۱ - اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$ (k داری است ثابت) آنگاه عبارت $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ وقتی کمترین مقدار را دارد که $a_i = \frac{k}{n}$.

اثبات: داریم

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{k}{n} + \frac{k}{n}\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{k}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{2k}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{k}{n}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k^2}{n} - \frac{2k}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - k\right).$$

با توجه به‌شرط $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$ ، عبارت آخر رابطه فوق برابر با صفر است. با توجه به اینکه k و n مقادیر ثابتی هستند، عبارت $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ زمانی کمترین مقدار را دارد که عبارت $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{k}{n}\right)^2$ کمترین مقدار را داشته باشد و این امر زمانی رخ می‌دهد که $a_i = \frac{k}{n}$.

لم ۱ را می‌توان به روش ضرایب لاگرانژ نیز ثابت کرد.

اثبات قضیه ۱: فرض کنید $\hat{\sigma}$ برآوردگری خطی بر اساس R_i ها باشد؛ یعنی $\hat{\sigma}=\sum_{i=1}^{m}a_iR_i$. ضرایب a_i را طوری تعیین می‌کنیم که $\hat{\sigma}$ برآوردگری نا اریب با کمترین واریانس باشد. با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی داریم $E(\hat{\sigma})=\sum_{i=1}^{m}a_iE(R_i)=d_2\sigma\sum_{i=1}^{m}a_i$. بنابراین برای این‌که $\hat{\sigma}$ برآوردگری نا اریب شود، a_i ها باید در شرط $\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{1}{d_2}$ صدق کنند. در این‌صورت MSE به‌صورت زیر خواهد بود:

$$MSE(\hat{\sigma})=Var(\hat{\sigma})=\sum_{i=1}^{m}a_i^2Var(R_i)=d_3^2\sigma^2\sum_{i=1}^{m}a_i^2 .$$

با توجه به ثابت بودن مقادیر σ^2 و d_3^2، برای کمینه کردن تابع $MSE(\hat{\sigma})$ کافی است عبارت $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ را تحت شرط $\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{1}{d_2}$ کمینه سازیم.

بنابر **لم ۱** این عبارت زمانی کمترین مقدار را دارد که $a_i=\frac{1}{md_2}$. بنابراین $\hat{\sigma}_1=\frac{\bar{R}}{d_2}$ برآوردگری نا اریب و خطی بر اساس R_i ها برای σ است. با جایگذاری a_i ها در $MSE(\hat{\sigma})$ خواهیم داشت:

$$MSE(\hat{\sigma}_1)=Var(\hat{\sigma}_1)=\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2\frac{\sigma^2}{m},$$

با فرض ثابت بودن اندازه نمونه n (و درنتیجه ثابت بودن مقادیر d_2 و d_3) واضح است که اگر $m\to\infty$ آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_1)\to 0$.

اثبات قضیه ۲: با توجه به رابطه $d_2^*=\sqrt{d_2^2+\frac{d_3^2}{m}}$ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$d_2^*>d_2, \tag{۸}$$

$$\text{اگر } m\to\infty \text{ آنگاه } d_2^*\to d_2 \tag{۹}$$

$$\left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)^2=1-\frac{1}{m}\left(\frac{d_3}{d_2^*}\right)^2, \tag{۱۰}$$

$$\left(\frac{d_2^*}{d_2}\right)^2=1+\frac{1}{m}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2, \tag{۱۱}$$

۱. چون $E(R_i)=d_2\sigma$ داریم $E(\hat{\sigma}_2)=\frac{1}{d_2^*}E(\bar{R})=\left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)\sigma$. بنابراین با استفاده از **رابطه (۸)** خواهیم داشت $E(\hat{\sigma}_2)<\sigma$. درنتیجه $\hat{\sigma}_2$ برآوردگری اریب برای σ است. مقدار اریبی برابر است با $Bias(\hat{\sigma}_2)=E(\hat{\sigma}_2)-\sigma=\sigma\left(\frac{d_2}{d_2^*}-1\right)<0$. **رابطه (۹)** نشان می‌دهد که اگر $m\to\infty$ آنگاه اریبی به سمت صفر میل می‌کند.

۲. چون $E(R_i)=d_2\sigma$ و $\mathrm{Var}(\mathrm{R_i})=\mathrm{d}_3^2\sigma^2$ داریم:

$$E(\hat{\sigma}_2^2)=\frac{1}{(d_2^*)^2}E(\bar{R}^2)=\frac{1}{(d_2^*)^2}\left[Var(\bar{R})+E^2(\bar{R})\right]$$
$$=\frac{1}{(d_2^*)^2}\left(\frac{d_3^2\sigma^2}{m}+d_2^2\sigma^2\right)=\frac{1}{(d_2^*)^2}\left(\frac{d_3^2}{m}+d_2^2\right)\sigma^2,$$

حال با استفاده از رابطه $d_2^* = \sqrt{d_2^2 + \frac{d_3^2}{m}}$ خواهیم داشت $E\left(\hat{\sigma}_2^2\right) = \sigma^2$. به‌عبارت‌دیگر برآوردگر $\hat{\sigma}_2^{\,2}$ نا اریب برای σ^2 است.

۳. داریم $Var\left(\hat{\sigma}_2\right) = \frac{1}{\left(d_2^*\right)^2} Var\left(\bar{R}\right) = \left(\frac{d_3}{d_2^*}\right)^2 \frac{\sigma^2}{m}$ و با درنظر گرفتن مقدار اریبی خواهیم داشت:

$$MSE\left(\hat{\sigma}_2\right) = Var\left(\hat{\sigma}_2\right) + Bias^2\left(\hat{\sigma}_2\right) = \frac{\sigma^2}{m}\left(\frac{d_3}{d_2^*}\right)^2 + \sigma^2\left(\frac{d_2}{d_2^*} - 1\right)^2$$
$$= \sigma^2\left[\frac{1}{m}\left(\frac{d_3}{d_2^*}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{d_2^*}\right)^2 - \frac{2d_2}{d_2^*} + 1\right],$$

حال با استفاده از **رابطه (۱۰)** خواهیم داشت:

$MSE(\hat{\sigma}_2) = 2\sigma^2\left(1 - \frac{d_2}{d_2^*}\right)$. درنتیجه با استفاده از **رابطه (۹)**، اگر $m \to \infty$ آنگاه $MSE\left(\hat{\sigma}_2\right) \to 0$.

۴. کارایی $\hat{\sigma}_1$ نسبت به $\hat{\sigma}_2$ به‌صورت زیر است:

$$e\left(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2\right) = \frac{MSE\left(\hat{\sigma}_2\right)}{MSE\left(\hat{\sigma}_1\right)} = \frac{2\sigma^2\left(1 - \frac{d_2}{d_2^*}\right)}{\frac{\sigma^2}{m}\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2}$$

بنابر **رابطه (۱۱)**

$$= \frac{2\left(1 - \frac{d_2}{d_2^*}\right)}{\left(\frac{d_2^*}{d_2}\right)^2 - 1} = 2\frac{\frac{d_2^* - d_2}{d_2^*}}{\frac{\left(d_2^*\right)^2 - d_2^2}{d_2^2}} = 2\frac{d_2^2\left(d_2^* - d_2\right)}{d_2^*\left(d_2^* - d_2\right)\left(d_2^* + d_2\right)} = \frac{2d_2^2}{d_2^*\left(d_2^* + d_2\right)},$$

می‌دانیم که $d_2^* > d_2$ (**رابطه (۸)**) بنابراین $\frac{d_2^* + d_2}{d_2} > \frac{d_2^* + d_2}{d_2^*} > \frac{d_2 + d_2}{d_2^*} = \frac{2d_2}{d_2^*}$

درنتیجه $d_2^*\left(d_2^* + d_2\right) < 2d_2^2$ و یا $\frac{2d_2^2}{d_2^*\left(d_2^* + d_2\right)} < 1$ ، بنابراین $e\left(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2\right) < 1$ یا به‌عبارت‌دیگر $MSE\left(\hat{\sigma}_2\right) < MSE\left(\hat{\sigma}_1\right)$ ؛ یعنی این‌که $\hat{\sigma}_2$ کاراتر از $\hat{\sigma}_1$ است.

اثبات قضیه ۴: می‌دانیم که اگر S انحراف معیار یک نمونه تصادفی n تایی از جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار σ باشد آنگاه $E(S) = c_4\sigma$ و $Var(S) = \left(1 - c_4^2\right)\sigma^2$ وقتی‌که $c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ [6]. فرض کنید $\hat{\sigma}$ برآوردگری خطی بر اساس S_i ها باشد؛ یعنی $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^{m} a_i S_i$. ضرایب a_i را طوری تعیین می‌کنیم که $\hat{\sigma}$ برآوردگری نا اریب با کمترین واریانس باشد. با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی داریم:

$$E(\hat{\sigma}) = \sum_{i=1}^{m} a_i E(S_i) = c_4 \sigma \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

بنابراین برای اینکه $\hat{\sigma}$ برآوردگری نا اریب شود، a_i ها باید در شرط $\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{1}{c_4}$ صدق کنند. در این صورت، MSE به‌صورت زیر خواهد بود:

$$MSE(\hat{\sigma}) = Var(\hat{\sigma}) = \sum_{i=1}^{m} a_i^2 Var(S_i) = \left(1 - c_4^2\right) \sigma^2 \sum_{i=1}^{m} a_i^2 .$$

با توجه به ثابت بودن مقادیر σ^2 و $1 - c_4^2$ ، برای کمینه کردن تابع $MSE(\hat{\sigma})$ کافی است عبارت $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ را تحت شرط $\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{1}{c_4}$ کمینه سازیم. بنابر **لم ۱** این عبارت زمانی کمترین مقدار را دارد که $a_i = \frac{1}{mc_4}$. بنابراین $\hat{\sigma}_4 = \frac{\bar{S}}{c_4}$ برآوردگری نا اریب و خطی بر اساس S_i ها برای σ است. با جایگذاری $a_i s$ در $MSE(\hat{\sigma})$ خواهیم داشت: $MSE(\hat{\sigma}_4) = Var(\hat{\sigma}_4) = \frac{\sigma^2 \left(1 - c_4^2\right)}{mc_4^2}$. واضح است که اگر $m \to \infty$ آنگاه $MSE(\hat{\sigma}_4) \to 0$.