توسعه روش‌های پایش ماتریس واریانس-کوواریانس چندمتغیره در فاز ۲

ثمینه کابلی*
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران
رسول نورالسناء
استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده در کنترل آماری فرایندهای چندمتغیره دو یا چند مشخصه کیفی باید به طور همزمان کنترل شوند. در کنترل چنین فرایندهایی، دستیابی به دو هدف عمده لازم است. هدف اول تشخیص وضعیت‌های خارج از کنترل و هدف دوم شناسایی مشخصه‌های کیفی عامل انحراف، در زمان وقوع یک وضعیت خارج از کنترل می‌باشد. در این تحقیق راه‌های دستیابی به هدف اول بررسی شده و روش‌هایی برای پایش ماتریس واریانس کوواریانس چندمتغیره در فاز ۲ ارائه شده است. هدف اصلی فاز ۲ کشف سریع شیفت‌ها می‌باشد. در این مقاله،۲ روش برای پایش ماتریس واریانس کوواریانس چندمتغیره در فاز ۲ ارائه شده و شیفت در یکی از مشخصه‌های کیفی مورد بررسی قرارگرفته است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش‌های پیشنهادی باعث کاهش ARL[1] (متوسط طول دنباله) و کشف سریع‌تر وضعیت خارج از کنترل می‌شوند.

کلمات کلیدی کنترل آماری فرایند چند متغیره، پایش ماتریس واریانس کوواریانس چند متغیره، متوسط طول دنباله

۱- مقدمه

تحلیلی از داده‌ها که با آزمایش یا مشاهده جمع‌آوری می‌شوند شرح تعدیل شده‌ای از پدیده را پیشنهاد می‌کند. در سرتاسر این فرایند تکراری اغلب متغیرهایی از مطالعه حذف یا به آن افزوده می‌شود. از این‌رو پیچیدگی‌های بیشتر پدیده‌ها نیاز به جمع‌آوری مشاهدات روی بسیاری از متغیرها دارد و روش‌های آماری مناسبی برای بررسی این پدیده‌ها لازم است. به خاطر اینکه داده‌ها اندازه‌های همزمانی را در مورد چند متغیر شامل می‌شود، این روش‌ها، تحلیل آماری چندمتغیره نامیده می‌شوند. همچنین لزوم درک روابط بین بسیاری از متغیرها اهمیت تحلیل آماری چندمتغیره را افزایش می‌دهد. در صنعت معمولاً کیفیت چند-متغیر از مشخصه کیفی به صورت همزمان کنترل می‌شود، یعنی برداری از مشخصه‌ها وجود دارد. توجه توام بر روی چند شاخص کیفی مسائل کنترل کیفیت چند متغیره را بوجود می‌آورد. موضوع اصلی در مسائل کنترل کیفی چند متغیره که این نوع از کنترل کیفیت تک‌متغیره جدا می‌کند، همبستگی متغیرهاست به طوری که اگر هر متغیر به صورت جداگانه بررسی شود و همبستگی بین آنها در نظر گرفته نشود عواقب نامطلوبی به‌بار می‌آورد. از این رو جهت پایش این متغیرها بردار لازم است بردار میانگین و ماتریس کوواریانس آنها پایش شود.

کنترل فرایند آماری متشکل از ابزارهایی است که توسط آن اختلاف فرایند را اندازه گیری نموده و آن را تحلیل می‌نماییم. یکی از ابزارهای مهم، نمودارهای کنترل می‌باشد. نمودارهای کنترل کیفیت آماری به عنوان یکی از ابزارهای کنترل، نخستین بار در دهه ۱۹۲۰ توسط شوهارت معرفی گردید. همانطور که لوری و مونتگومری [۳] در مطالعات خود اشاره کرده اند، رویکرد چند متغیره در کنترل کیفیت اولین بار توسط هتلینگ در سال ۱۹۴۷ مورد بررسی قرار گرفت. وی آماره T^2 و توزیع آماری آن را ارائه داد و از آن در نمودارهای کنترل استفاده کرد.

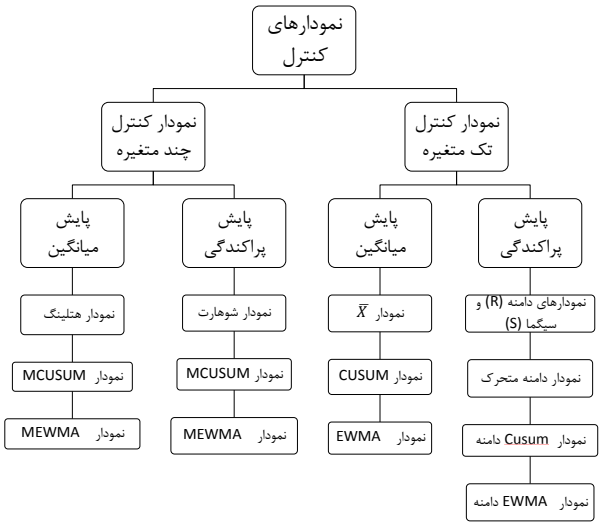
تاریخ دریافت: ۹۲/۹/۲۵ تاریخ پذیرش: ۹۲/۱۱/۳۰

*(Corresponding author) samin.kaboli@gmail.com

در سال ۱۹۶۰ میلادی با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر، کنترل آماری فرایند چندمتغیره بسیار مورد توجه قرار گرفت. از این سال به بعد مقالات متعددی در این زمینه منتشر شدند. تلاش برای استفاده از نمودارهای کنترلی در مسئله کنترل کیفی چندمتغیره زمینه گسترده‌ای در کنترل آماری فرایند چندمتغیره ایجاد کرده است و موجب پیدایش و توسعه نمودارهای کنترلی چند متغیره شده است. از آنجایی که بیشتر فعالیت‌های صورت گرفته در این زمینه در مورد بردار میانگین بوده و فعالیت کمتری در مورد روش‌های پایش ماتریس کوواریانس انجام شده است، در این مقاله روش‌های پایش ماتریس کوواریانس بررسی شده و روش‌های جدیدی در این زمینه توسعه داده می‌شود.

۲- نمودارهای کنترل چندمتغیره

نمودارهای کنترل مورد استفاده جهت پایش چندین مشخصه کیفی به طور همزمان، نمودار کنترل چندمتغیره نامیده می‌شود. برتری این نمودارها این است که قادرند چندین متغیر کیفی را به طور همزمان برای تغییرات میانگین و پراکندگی فرایند، پایش کنند. نمودارهای کنترل مطابق شکل ۱ دسته بندی می شوند. در بیشتر نمودارها فرض می‌شود که جمعیت والد دارای توزیع نرمال می‌باشد. حتی اگر جمعیت والد نرمال نباشد، به وسیله قضیه حد مرکزی میانگین‌های نمونه‌ای به توزیع نرمال میل می‌کنند. در نتیجه حتی وقتی که جمعیت نرمال نیست، این فرض به خطاهای مهمی منجر نمی‌شود.



شکل ۱- انواع نمودارهای کنترل متغیرها

در دو دهه اخیر، تعداد زیاد مقالات چاپ شده در ژورنال‌های کیفیت و آمار، گواه این مطلب می‌باشد که تمایل تحقیقات در زمینه کنترل کیفیت چندمتغیره افزایش یافته است. بهبودهای اخیر در بسیاری از کاربردهای صنعتی می‌باشد، که کیفیت محصول بوسیله چندین مشخصه کیفی وابسته تعیین می‌شود و باید به طور همزمان کنترل و پایش شوند.

نشانه دیگر رشد قابل قبول این روش‌ها در صنعت، دسترس‌پذیری بعضی از این ابزارهای کنترل کیفیت دربسته‌های نرم‌افزاری مثل Minitab می‌باشد. تعدادی از نویسندگان اشاره کرده‌اند که کنترل کیفیت چندمتغیره، به خصوص کاربرد نمودارهای کنترل چندمتغیره، مهمترین ناحیه تحقیقات در قرن اخیر می‌باشد. (وودال و مونتگومری [۴]. اکثریت تحقیقات در ۲۰ سال اخیر بر بهبود نمودارهای کنترل چندمتغیره برای پایش شیفت در میانگین فرایند متمرکز بوده است. بهترین مرورها از این بهبودها می‌تواند در مقالات زیر یافت شود: ویردا [۵]، ماسون و همکاران [۶].

اگر چه این مرورها شامل بحث‌هایی در مورد نمودارهای کنترل چندمتغیره جهت پایش تغییرات ماتریس کوواریانس نیز می‌باشد، پوشش اصلی به بهبودهایی که قبل از سال ۱۹۹۰ انجام شده است محدود می‌شود. از ۱۹۹۰، بسیاری از مقالات چاپ شده به طور ویژه برروی نمودارهای کنترل چندمتغیره برای پایش ماتریس کوواریانس بحث می‌کند. برای بحث نمودارهای کنترل طراحی شده در فاز I کنترل فرایند، مقالات آلت [۷]، سالیوان و وودال [۸] وجود دارند. نمودارهای کنترل چندمتغیره پایش ماتریس کوواریانس براساس نوع نمودارها دسته‌بندی می‌شوند (جدول ۱). انواع نمودارها شامل نمودار شوهارت چندمتغیره، CUSUM[1] چندمتغیره و EWMA[2] چند متغیره می‌باشند.

وقتی ماتریس کوواریانس نمونه‌ای محاسبه می‌شود و رنک کامل دارد، رویکردها نوعاً وابسته به واریانس تعمیم یافته نمونه‌ای یا نسبت درست نمایی مربوط به آزمون تساوی دو ماتریس می‌باشند. در این شرایط، Σ. معلوم است یا اینکه می‌تواند از نمونه آزمایش تحت کنترل برآورد شود. نمودارهای کنترل بی‌نظمی شرطی وابسته به مجموع لگاریتم نسبت واریانس نمونه‌ای برواریانس جامعه برای هر P متغیر، نمودار کنترل وابسته به مجموع ۱-p۲، χ^2_1 مستقل به دست آمده از تجزیه ماتریس کوواریانس نمونه‌ای و نمودار کنترل توسعه یافته

نمودارهای کنترل	مدل‌های تعریف شده	تحقیقات انجام شده	سال
نمودارکنترل شوهارت	بی‌نظمی شرطی	گوررو و کاسمانو[۹]	۱۹۹۵
	تجزیه S_t	تنگ و بارنت[۱۰]	۱۹۹۶
	آزمون دو نمونه‌ای	لوینسون و همکاران[۱۱]	۲۰۰۲
	احتمال تبدیل انتگرال	لین و یه[۱۲]	۲۰۰۲
	دامنه متحرک	خو وکواه[۱۳]	۲۰۰۳
	نسبت درستنمایی	سورتیهادی و همکارانش[۱۴]	۲۰۰۴
نمودارکنترل MEWMA	EWMA چندگانه	هاوکینز[۱۵]	۱۹۹۳
	نمودار V	یه و همکاران[۱۶]	۲۰۰۳
	EWMLR	سوگیرا و ناگاو [۱۷]	۱۹۶۸
	Max MEWMV	یه [۱۸]	۲۰۰۵
	MEWMS , MEWMV	هوانگ [۱۸]	۲۰۰۵
	MEWMSL , MEWMVL	استادشریفی[۱۹]	۲۰۰۹
نمودارکنترل MCUSUM	CUSUM چندگانه	هاوکینز	۱۹۹۳
	دنباله برآورد	چن و زنک [۲۰]	۲۰۰۱
	نسبت درستنمایی	سورتیهادی و همکارانش	۲۰۰۴

جدول ۱. مرور ادبیات

براساس روش دنباله برآورد متفاوت می‌باشند. این نمودارها از وجود شیفت میانگین اثر نمی‌گیرند. در میان نمودارهای شوهارت، استفاده از نمودار تجزیه S_t توصیه می‌شود، از آنجایی که در حالت کلی هر دو نمودار واریانس تعمیم یافته و نسبت درستنمایی را پوشش می‌دهد. [۱۰]

نمودار CUSUM دنباله برآورد نیز هر دو نمودار شوهارت واریانس تعمیم یافته و نسبت درستنمایی را پوشش می‌دهد. [۲۰] در میان نمودارهای EWMA، استفاده از نمودار EWMLR را توصیه می‌شود از آنجایی که می‌تواند تغییرات ماتریس کوواریانس را وقتی ماتریس کوواریانس خارج از کنترل است و همان واریانس تعمیم‌یافته را به عنوان ماتریس کوواریانس تحت کنترل دارد، کشف کند. [۱۶]

نمودارهای کنترل متعددی برای مشاهدات انفرادی بهبود داده شده‌اند. این نمودارها شامل نمودارهای کنترل براساس دامنه متحرک، نمودارهای EWMA و CUSUM چندگانه، نمودار براساس دنباله برآورد، نمودار MaxMEWMV و نمودارهای MEWMV و MEWMS می‌باشند. در همه نمودارها بجز نمودار MEWMV به طور قطع فرض می‌شود که میانگین فرایند μ. در طول پایش فرایند تحت کنترل باقی می‌ماند، بنابراین اگر شیفت در میانگین اتفاق بیفتد، درکارایی این نمودارها تأثیر می گذارد.

آخرین تحقیقات نشان می‌دهد که کارایی نمودارهای MEWMS وMEWMV که توسط هوانگ[۱۸] تعریف شده‌اند، در پایش پراکندگی فرایند چندمتغیره با مشاهدات انفرادی بهتر از روش‌های موجود می‌باشند. در روش‌های پیشنهادی توسط استادشریفی [۱۹]، به جای استفاده از Trace، از فاصله بر اساس $L_1 - norm$ و $L_2 - norm$ بین عناصر قطری برآورکننده از مقدار انتظاری آن استفاده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کاربرد این آماره‌ها به طور قابل توجهی توانایی کشف تغییرات ماتریس کوواریانس فرایند را بهبود می‌دهد.

۳- روش‌های پیشنهادی پایش ماتریس واریانس کوواریانس در فاز ۲

در کنترل آماری فرایند چندمتغیره باید چند مشخصه کیفی همبسته به طور همزمان کنترل شوند. به عبارتی می‌بایست دو هدف محقق شوند. اولا باید بتوان با استفاده از یک ابزار کنترل مناسب، به تحت کنترل بودن یا نبودن فرایند پی برد. ثانیا در زمان وقوع یک وضعیت خارج از کنترل، امکان شناسایی مشخصه‌های کیفی عامل انحراف وجود داشته باشد. برای دستیابی به هدف اول، از نمودارهای کنترل به عنوان ابزار مفیدی که تاکنون برای این منظور معرفی شده‌اند، استفاده می‌شود.

در حالت تک متغیره، نمودارهای شناخته شده S, R, S^2 نمودارهای استاندارد برای هدف پایش پراکندگی فرایند می‌باشد. [۲۱]. با وجود اینکه بسط این روش‌ها به حالت چندمتغیره اهمیت زیادی در عمل دارد، به روش‌های نمودار کنترل برای پایش کوواریانس فرایند چندمتغیره توجه کمی شده است. شاید این کمبود بهبود به خاطر این است که نتایج آماری ماتریس کوواریانس نسبتا پیچیده است. بنابراین، برخلاف مسئله کنترل میانگین فرایند کشف شیفت در ماتریس کوواریانس به طور منحصربه‌فرد آسان نیست. مشکل دیگر در طراحی روش کنترل چندمتغیره برای پراکندگی، شناسایی پارامترهای خارج از کنترل فرایند است. وقتی نمودار کنترل علامت خارج از کنترل می‌دهد، در حالت چندمتغیره ضرورت پایش تغییرپذیری فرایند بیشتر است.

ساختار نمودارهای کنترل پیشنهادی از قوانین آزمون فرض پیروی می‌کند. برای همه نمودارهای کنترل، توزیع فرایند، نرمال چندمتغیره با بردار میانگین ثابت فرض می‌شود. ما فرض می‌کنیم اطلاعات کافی از عملکرد تحت کنترل در دسترس است، بنابراین ماتریس کوواریانس تحت فرض صفر کاملاً معین است. ما از ARL برای تعیین کارایی نمودارهای کنترل موردنظر استفاده می‌کنیم. به علت کمبود دانش مشخصات توزیع آماره‌ها، ما از شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تعیین و مقایسه کارایی ARL استفاده می‌کنیم.

سورتیهادی و همکارانش[۱۴]، الگوها یا مدل‌های ممکن مختلفی برای شیفت در ماتریس کوواریانس فرض کرده‌اند. سه مورد خاص کاربردهای عملی کنترل کیفیت بیان شده و نمودارهای کنترل برای کشف این شیفت‌ها پیشنهاد شده است. مورد I مربوط به شیفت در ماتریس کوواریانس درجایی که واریانس یک جزء به وسیله یک ثابت معین زیاد می‌شود و کوواریانس بین این جزء و اجزاء باقیمانده مطابق آن تغییر می‌کند. مورد II اساساً همان مورد I است به جز اینکه فاکتور تورم نامعین است. در مورد III، ماتریس کوواریانس در همه اجزاء دریک ثابت نامعین ضرب می‌شود. این شیفت ویژه تغییر فرایند در همه متغیرهای افزایش یافته به وسیله همان فاکتور را نشان می‌دهد، درحالی‌که وابستگی بدون تغییر می‌ماند. آماره آزمون برای هرمورد با استفاده از معیار نسبت درستنمایی به دست آمده است. نمودارهای شوهارت و CUSUM برای این آماره بیان شده است.

در این تحقیق شیفت در ماتریس واریانس-کوواریانس مطابق با روش ۱ مقاله سورتیهادی و همکارانش در نظر گرفته شده است.

به طوری که مقدار شیفت در مدل‌ها معین می باشد و پراکندگی استاندارد یکی از مشخصه‌های کیفی به طور معین افزایش یا کاهش یابد در حالی که دیگری ثابت بماند. با توجه به شیفت تعریف شده، آماره‌های جدیدی برای کشف این شیفت بیان می‌شود. نمودارهای کنترل این آماره‌ها بیان شده و با نمودارهای کنترل بیان شده در مقاله سورتیهادی و همکارانش مقایسه می‌شود.

بردار $x_1 , x_2,\dots , x_p$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال p متغیره$N_p(0,\Sigma)$ است. این بردارها اندازه‌های P مشخصه وابسته فرایند را بیان می‌کنند. در آماره‌های معرفی شده نمودارهای کنترل استاندارد فرض می‌شود، به طوریکه.Σ معین فرض می‌شود و میانگین فرایند ثابت در نظر گرفته می‌شود. در این آماره‌ها برآوردکننده ماتریس واریانس-کوواریانس به صورت حاصل تفریق برآوردکننده از مقدار اولیه Σ تعریف می‌شود و آزمون فرض مورد نظر انجام می‌شود.

۳-۱ معرفی آماره $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$

در این روش برآوردکننده‌ای که برای ماتریس واریانس-کوواریانس پیشنهاد می‌شود به صورت $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ می‌باشد. سپس برای انجام آزمون فرض مورد نظر آماره آزمون برابر تفاضل برآوردکننده از ماتریس واریانس تعریف می‌شود.

$$W = \sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n} - sigma \qquad (1)$$

برای کشف شیفت در ماتریس واریانس-کوواریانس آماره تعریف شده در دو حالت با حدود کنترل مقایسه می‌شود. در حالت اول عبارت مورد نظر به صورت رابطه (۲) محاسبه می‌شود:

$$h = \max[W(1,1)^2 + W(2,1)^2 + W(1,2)^2, W(2,2)^2 + W(2,1)^2 + W(1,2)^2] \qquad (2)$$

در حالت دوم عبارت مورد نظر به صورت رابطه (۳) محاسبه می‌شود و سپس از EWMA این عبارت برای مقایسه با حدود کنترل استفاده می‌شود.

$$h = [W(1,1)^2 + W(1,2)^2 + W(2,1)^2 + W(2,2)^2] \qquad (3)$$

۴- مثال‌هایی از کاربرد روش‌های پایش ماتریس واریانس-کوواریانس برای کشف وضعیت خارج از کنترل

برای درک بهتر روش‌های جدید ارائه شده و استفاده از آماره‌های پیشنهادی، مثال‌هایی که شامل دو و سه مشخصه کیفی همبسته است بررسی خواهد شد. فرض کنید فرایندی شامل چند مشخصه کیفی است که این مشخصه‌ها باید به طور همزمان کنترل شوند. برای این منظور هدف، استفاده از آماره‌های تعریف شده برای کشف وضعیت خارج از کنترل فرایند در حالتی است که تغییر در ماتریس واریانس-کوواریانس به وجود می‌آید.

بنابراین ابتدا باید حدود کنترل محاسبه شود، سپس از آماره‌ها جهت کنترل فرایند استفاده خواهد شد. برای این منظور از داده‌های شبیه‌سازی و نرم افزار Matlab استفاده می‌کنیم. ابتدا ۳۰ مرتبه نمونه‌گیری تصادفی متوالی با اندازه نمونه ۵ از توزیع نرمال دو و سه متغیره با بردار میانگین و ماتریس همبستگی و ماتریس واریانس-کوواریانس به صورت زیر (با فرض اینکه این مقادیر از پیش تعیین شده‌اند) تولید می‌کنیم.

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\rho}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ \\ ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۴}$$

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \underline{\underline{\rho}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۰/۵ & ۱ & ۰/۵ \\ ۰/۵ & ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۵}$$

برای محاسبه حدود کنترل نمودار آماره‌های مورد نظر، مقدار α را برابر ۰/۰۰۵ در نظر می‌گیریم. بر این اساس اندازه ARL تحت کنترل به وسیله رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$ARL = \frac{۱}{\alpha} \tag{۶}$$

سپس حدود کنترل نمودارهای پیشنهادی را برای رسیدن به ARL تحت کنترل محاسبه می‌کنیم، برای این منظور داده‌های تصادفی نرمال با پارامترهای تعیین شده تولید کرده، سپس حدود کنترل را برابر مقدار معینی فرض کرده و مقدار آماره‌ها را تا زمانی‌که خارج از حد بالای کنترل قرار گیرد محاسبه و تعداد دفعات آن را به وسیله متغیر RL شمارش می‌کنیم، این کار را برای ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار کرده و مقدار ARL را به دست می‌آوریم، درصورتی که این مقدار با مقدار ARL تحت کنترل برابر باشد، حدود کنترل به دست آمده حدود کنترل مناسب برای هر یک از نمودارها می‌باشد.

۴-۱ بررسی حالت‌های مختلف تغییر در ماتریس واریانس-کوواریانس

در این بخش به مقایسه روش‌های پیشنهاد شده برای پایش ماتریس واریانس-کوواریانس چند متغیره در فاز دو از طریق شبیه سازی و محاسبه متوسط طول دنباله یا ARL پرداخته می‌شود.

به منظور سهولت در امر مقایسه، تمامی طرح‌های نمودار کنترل به گونه‌ای طراحی شده‌اند که ARL تحت کنترلی در حدود ۲۰۰ داشته باشند. ثابت‌های هموار θ، همگی برابر با ۰/۲ در نظر گرفته شده اند. البته باید توجه داشت که می‌توان از ثابت‌های هموار متفاوتی برای هر نمودار استفاده کرد. در این مطالعه شبیه‌سازی، هر مقدار ARL، با ۱۰۰۰۰ بار تکرار تخمین‌زده می‌شود.

در شبیه‌سازی‌ها به منظور رعایت سادگی σ_1^2 و σ_2^2 هردو برابر با ۱ فرض می شوند. به منظور شناسایی اثر همبستگی بین متغیرهای پاسخ، از مقادیر متفاوتی برای ρ استفاده شده است که به طور مثال می‌توان ρ=۰/۱ ، ۰/۵و۰/۹ را نام برد.

در این بخش با اعمال تغییر در انحراف معیار هر یک از مشخصه‌های کیفی، اقدام به تولید اعداد تصادفی شده است و این کار تا ایجاد یک وضعیت خارج از کنترل ادامه یافته است.

با ایجاد یک وضعیت خارج از کنترل، مقدار RL محاسبه شده است و این کار برای ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار شده و مقدار ARL محاسبه شده است. همچنین با در نظر گرفتن α = ۰/۰۰۵، ρ = ۰/۵ و اندازه‌های نمونه n=۵ و n=۱۰ مقدار UCL برای هر یک از نمودارها به دست آمده است. روش‌های(۱) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ و (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ به ترتیب دارای حدود کنترلی برابر با ۱۲/۴۵ و ۱۶/۳ می‌باشند و ARL تحت کنترلی در حدود ۲۰۰ را حاصل می‌کنند.

با در نظر گرفتن مقادیر فوق در هر یک از نمودارهای پیشنهادی، حالت‌هایی که تغییر در انحراف معیار مشخصه‌ها به صورت $0 \leq \delta \leq 2$ می‌باشد را بررسی کرده و به مقایسه حالت‌های فوق می‌پردازیم.

۴-۲ تغییر در ماتریس واریانس- کوواریانس فرایند دومتغیره به صورت $S_1 = S_{01} + \delta_1$ یا $S_2 = S_{02} + \delta_2$ با اندازه نمونه n=۵

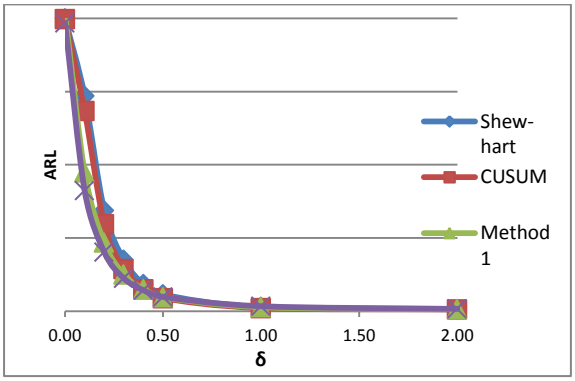
با توجه به روش بیان شده برای محاسبه هر یک از آماره‌ها، با ایجاد شیفت در انحراف معیار هر یک از مشخصه‌های کیفی x_1 یا x_2، مقادیر ARL مطابق با جدول زیر به دست آمده است، سپس نمودار مربوط به آنها براساس شیفت‌های مختلف رسم شده است.

در این حالت پراکندگی استاندارد مشخصه کیفی x_1 به طور معین افزایش می‌یابد در حالی که مشخصه کیفی x_2 ثابت می‌ماند. مقادیر ARL هر یک از آماره‌ها به ازای افزایش در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 ($n=5$ ، $\rho=0.5$ ، $0 \leq \delta_1 \leq 2$ و $\delta_2 = 0$) در جدول (۲) و نمودار کنترل آنها در شکل (۲) نشان داده شده است.

برای مقایسه نمودارهای پیشنهادی در کشف وضعیت خارج از کنترل نسبت به تغییر در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 در فرایند دومتغیره، نتایج کشف وضعیت خارج از کنترل با استفاده از نمودارهای شوهارت و CUSUM بیان شده در مقاله سورتیهادی و همکارانش (۲۰۰۴) را با نتایج نمودارهای پیشنهادی مقایسه می‌کنیم.

جدول ۲: مقادیر ARL به ازای شیفت در انحراف معیارمشخصه کیفی x_1 در فرایند ۲ متغیره
($n=5$ ، $\rho = 0.5$ ، $0 \leq \delta_1 \leq 2$ و $\delta_2 = 0$)

δ_1	Shew-hart	Cusum	Method ۱	Method ۲
۰	۲۰۰	۱۹۹/۵۸	۲۰۳/۴۵	۱۹۶/۹۱
۰/۱	۱۴۷/۵	۱۳۶/۶۹	۹۴/۷۹	۸۲/۲۰
۰/۲	۶۸/۷۲	۵۹/۲۲	۴۶/۸۹	۴۰/۲۴
۰/۳	۳۴/۹	۲۸/۷۲	۲۴/۹۸	۲۲/۳۸
۰/۴	۱۸/۳۹	۱۴/۹۵	۱۴/۹۶	۱۴/۲۵
۰/۵	۱۱/۲۸	۸/۷۷	۹/۵۰	۹/۷۲
۱	۲/۷۵	۲/۰۸	۲/۶۶	۳/۳۴
۲	۱/۲۶	۱/۱۴	۱/۲۷	۱/۵۱



شکل ۲ : نمودار مقایسه‌ای مقادیر ARL نمودارهای پیشنهادی به ازای شیفت در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 در فرایند ۲ متغیره
($n=5$ ، $\rho = 0.5$ ، $0 \leq \delta_1 \leq 2$ و $\delta_2 = 0$)

همانطور که ملاحظه می‌کنید به ازای میزان شیفت یکسان، مقدار ARL به ازای شیفت در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 در نمودارهای پیشنهادی (۱) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ و (۲) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ EWMA، کمتر از سایر نمودارهاست، این بدین معناست که کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از نمودارهای پیشنهادی، با تعداد نمونه کمتری نسبت به نمودار شوهارت و CUSUM انجام می‌شود، یعنی کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از نمودارهای پیشنهادی (۱) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ و (۲) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ EWMA، سریعتر از سایر نمودارها انجام می‌شود.

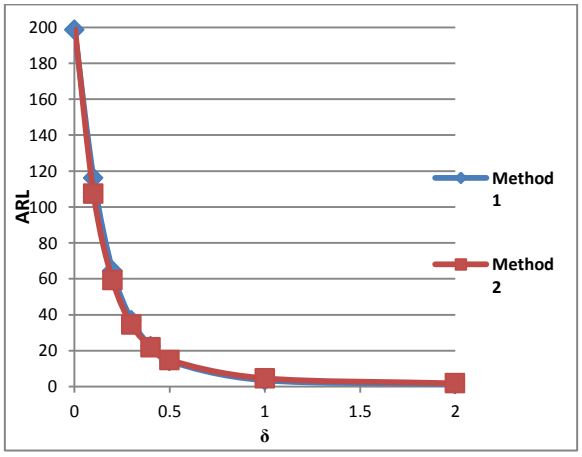
۴-۳ تغییر در ماتریس واریانس- کوواریانس فرایند سه‌متغیره به صورت $S_1 = S_{01} + \delta_1$ یا $S_2 = S_{02} + \delta_2$ یا $S_3 = S_{03} + \delta_3$ با اندازه نمونه n=۵

با توجه به روش بیان شده برای محاسبه هر یک از آماره‌ها، با ایجاد شیفت در انحراف معیار یکی از مشخصه‌های کیفی x_1 یا x_2 یا x_3، مقادیر ARL مطابق با جدول (۳) به دست آمده است، سپس نمودار مربوط به آنها براساس شیفت در ماتریس واریانس-کوواریانس یکی از متغیرها رسم شده است. در این حالت پراکندگی استاندارد مشخصه کیفی x_1 به طور معین افزایش می‌یابد در حالی که مشخصه کیفی x_2 و x_3 ثابت است. مقادیر ARL هر یک از آماره‌ها به ازای افزایش در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 ($n=5$ ، $\rho=0.5$ ، $0 \leq \delta_1 \leq 2$ و $\delta_2 = 0$ و $\delta_3 = 0$) در جدول (۳) و نمودار کنترل آنها در شکل (۳) نشان داده شده است.

جدول ۳: مقادیر ARL به ازای شیفت در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 فرایند ۳ متغیره

$(\delta_3 = 0 \text{ و } \delta_2 = 0 \text{ و } 0 \leq \delta_1 \leq 2 \text{ ، } \rho=0.5 \text{ ، } n=5)$

δ_1	Method ۱	Method ۲
۰	۱۹۸/۶۳	۲۰۱/۴۹
۰,۱	۱۱۶/۰۳	۱۰۷/۳۴
۰,۲	۶۴/۳۸	۵۹/۲۲
۰,۳	۳۶/۸۷	۳۴/۵۵
۰,۴	۲۲/۳۴	۲۱/۹۰
۰,۵	۱۴/۰۹	۱۴/۷۰
۱	۳/۵۰	۴/۶۰
۲	۱/۳۸	۱/۸۱



شکل ۳: نمودار مقایسه‌ای مقادیر ARL به ازای شیفت در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 فرایند سه‌متغیره

$(\delta_3 = 0 \text{ و } \delta_2 = 0 \text{ و } 0 \leq \delta_1 \leq 2 \text{ ، } \rho=0.5 \text{ ، } n=5)$

برای مقایسه نمودارهای پیشنهادی در کشف وضعیت خارج از کنترل نسبت به تغییر در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 در فرایند ۳ متغیره، نتایج کشف وضعیت خارج از کنترل با استفاده نمودارهای پیشنهادی را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. همانطور که ملاحظه می‌کنید به ازای میزان شیفت یکسان، مقدار ARL به ازای شیفت در انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 در نمودار پیشنهادی (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ کمتر از نمودار پیشنهادی (۱) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ است. این بدین معناست که کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از نمودار پیشنهادی متد ۲ با تعداد نمونه کمتری نسبت به نمودار پیشنهادی متد ۱ انجام می‌شود، یعنی کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از نمودار متد ۲ سریعتر از نمودار متد ۱ انجام می‌شود.

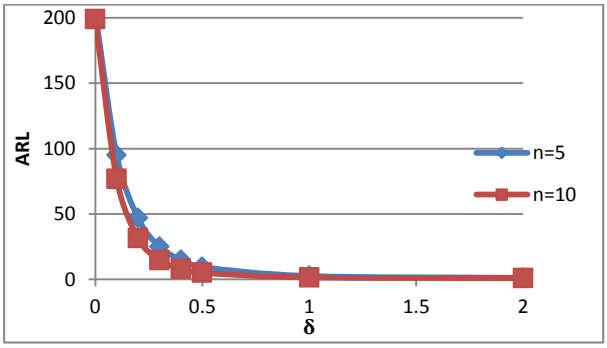
۴-۴ مقایسه مقادیر ARL نسبت به تغییر در تعداد نمونه در نمودارهای پیشنهادی

در این بخش جهت مقایسه عملکرد نمودارهای پیشنهادی نسبت به تغییر در تعداد نمونه، با ایجاد شیفت در پراکندگی مشخصه کیفی x_1، مقادیر ARL را در هر یک از نمودارها محاسبه کرده و مقایسه می‌کنیم.

جدول ۴: مقادیر ARL نسبت به تغییر تعداد نمونه به ازای شیفت در پراکندگی مشخصه کیفی x_1 در نمودار (۱) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ فرایند دومتغیره

$(0 \leq \delta_1 \leq 2 \text{ ، } \rho = 0.5)$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ (1)		
δ_1	n=۵	n= ۱۰
۰	۲۰۳/۴۵	۱۹۸/۷۴
۰/۱	۹۴/۷۹	۷۶/۷۲
۰/۲	۴۶/۸۹	۳۱/۶۱
۰/۳	۲۴/۹۸	۱۴/۷۵
۰/۴	۱۴/۹۶	۸/۱۶
۰/۵	۹/۵۰	۵/۰۸
۱	۲/۶۶	۱/۵۵
۲	۱/۲۷	۱/۰۴



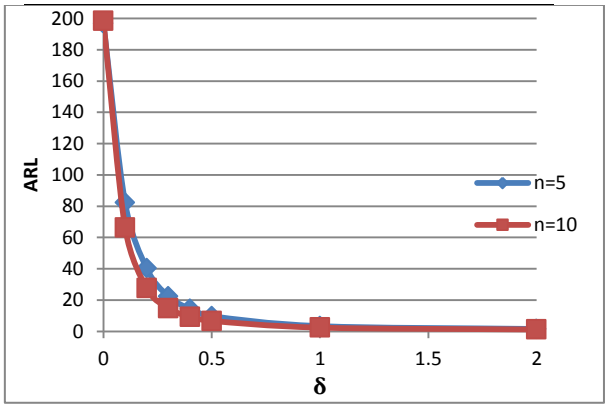
شکل ۴ : نمودار مقایسه‌ای مقادیر ARL نسبت به تغییر تعداد نمونه در نمودار (۱) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{x}x}{n}$ فرایند دومتغیره

$(0 \leq \delta_1 \leq 2 \text{ ، } \rho = 0.5)$

همانطورکه ملاحظه می‌کنید به ازای میزان شیفت یکسان، مقدار ARL در نمودار پیشنهادی (۱) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ به ازای شیفت در مشخصه کیفی x_1، با افزایش اندازه همبستگی کاهش می‌یابد، این بدین معناست که کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از نمودار پیشنهادی (۱) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ با افزایش ضریب همبستگی سریعتر انجام می‌شود. همانطورکه ملاحظه می‌کنید به ازای میزان شیفت یکسان، به ازای شیفت در مشخصه کیفی x_1، با افزایش تعداد نمونه کاهش می‌یابد، این بدین معناست که کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از نمودار پیشنهادی (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ با افزایش تعداد نمونه سریعتر انجام می‌شود. بنابراین نمودارهای پیشنهادی در کشف وضعیت خارج از کنترل نسبت به تغییر در تعداد نمونه، عملکردی مشابه دارند، یعنی کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه‌های کیفی با افزایش تعداد نمونه سریعتر انجام می‌شود.

جدول ۵: مقادیر ARL نسبت به تغییر تعداد نمونه به ازای شیفت در پراکندگی مشخصه کیفی x_1 در نمودار (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ فرایند دومتغیره
$(0 \le \delta_1 \le 2 ، \rho = 0/5)$

	EWMA $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ (۲)	
δ_1	n=۵	n=۱۰
۰	۱۹۶/۹۱	۱۹۸/۵۴
۰/۱	۸۲/۲۰	۶۶/۳۷
۰/۲	۴۰/۲۴	۲۷/۵۷
۰/۳	۲۲/۳۸	۱۴/۷۲
۰/۴	۱۴/۲۵	۹/۳۱
۰/۵	۹/۷۲	۶/۶۶
۱	۳/۳۴	۲/۳۷
۲	۱/۵۱	۱/۱۸



شکل ۵: نمودار مقایسه‌ای مقادیر ARL نسبت به تغییر تعداد نمونه در نمودار (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ فرایند دومتغیره
$(0 \le \delta_1 \le 2 ، \rho = 0,5)$

۵- نتیجه‌گیری

تاکنون نمودارها و روش‌های مختلفی برای پایش ماتریس واریانس-کوواریانس فرایندهای چندمتغیره ارائه شده است، نقایصی که در این نمودارها وجود دارد، نیاز به استفاده از نمودارهای دیگری که بتواند کارایی لازم را در عمل داشته باشد بسیار نمایان می‌سازد. در نمودارهای پیشنهادی در این تحقیق برای کشف سریعتر وضعیت خارج از کنترل به ازای تغییر در انحراف معیار مشخصه‌های کیفی، از آماره‌های (۱) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ و (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ برای کنترل فرایند استفاده شده است. در هر آماره برآوردکننده‌ای برای ماتریس واریانس-کوواریانس تعریف می‌شود و آزمون فرض مورد نظر انجام می‌شود. در این حالت آماره آزمون حاصل تفریق برآوردکننده از مقدار اولیه Σ می‌باشد، براین اساس دو آماره پیشنهادی توسعه داده شده است. در این روش‌ها مطابق روش‌های بیان شده در مقاله سورتیهادی و همکاران [۱۴] شیفت در انحراف معیار مشخصه‌های کیفی در حالت دومتغیره و سه‌متغیره با یکدیگر مقایسه شده است، عملکرد روش‌ها از طریق شبیه‌سازی مورد مقایسه قرار گرفت و مطالعات شبیه‌سازی نشان داد که در حالتی که شیفت در انحراف معیار یکی از مشخصه‌های کیفی ایجاد می‌شود، آماره‌های پیشنهادی در(۱) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ و (۲) EWMA $\sum_{i=1}^{n}\frac{\acute{x}x}{n}$ برای شناسایی شیفت در انحراف معیار مشخصه‌های کیفی بهتر از آماره‌های شوهارت و CUSUM معرفی شده توسط سورتیهادی و همکاران (۲۰۰۴) کار می‌کند، یعنی کشف وضعیت خارج از کنترل انحراف معیار مشخصه کیفی x_1 با استفاده از این نمودارها سریعتر از نمودارهای شوهارت و CUSUM انجام می‌شود. همچنین حساسیت نمودارهای پیشنهادی نسبت به تغییر در تعداد نمونه بررسی شده است، نتایج بررسی نشان می‌دهد که حساسیت نمودارهای پیشنهادی در کشف وضعیت خارج از کنترل نسبت به تغییر در تعداد نمونه بهبود می‌یابد.

مراجع

[1] نورالسناء، رسول،(۱۳۷۹)،"کنترل کیفیت آماری"، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران.

[2] نیرومند، حسینعلی، (۱۳۷۸)،"تحلیل آماری چندمتغیری کاربردی"، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[3] Lowry CA., Montgomery DC., (1995),A review of multivariate control charts. IIE Transactions; 27:800–810.

[4] Woodall WH, Montgomery DC, "Research issues and ideas in statistical process control. "Journal of Quality Technology; 31(4):376–386, (1999).

[5] Wierda S.J., Multivariate Statistical Process Control, Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands, (1994).

[6] Mason R.L., Champ C.W., Tracy N.D., Wierda S.J., and Young J.C., Assessment of multivariate process control techniques. Journal of Quality Technology, 29, 140-143, (1997).

[7] Alt F.B., Multivariate quality control. In Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 6, ed. S. Kotz and N.L. Johnson (New York: Wiley), pp. 110-122, (1985).

[8] Woodall WH., Controversies and contradictions in statistical process control. Journal of Quality Technology;32:341–350, (2000).

[9] Guerrero-Cusumano J.L., Testing variability in multivariate quality control: A conditional entropy measure approach. Information Sciences, 86, 179-202, (1995).

[10] Tang P.F., and Barnett N.S., Dispersion control for multivariate processes. The Australian Journal of Statistics, 38, 235-251, 253-273, (1996a, 1996b).

[11] Levinson W., Holmes D.S., and Mergen A.E., Variation chart for multivariate processes. Quality Engineering, 14, 539-545, (2002).

[12] Yeh A.B., and Lin D.K.J., A new variables control chart for simultaneously monitoring multivariate process mean and variability. International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 9, 41-59, (2002).

[13] Khoo M.B., and Quah S.H., Multivariate control chart for process dispersion based on individual observations. Quality Engineering, 15, 639-642, (2003).

[14] Surtihadi J., Raghavachari M., Runger G. Multivariate control charts for process dispersion. International Journal of Production Research;42:2993–3009, (2004).

[15] Hawkins D.M., Regression adjustment for variables in multivariate quality control. Journal of Quality Technology, 25, 170-182, (1993).

[16] Yeh A.B., Lin D.K.J., Zhou H. and Venkataramani C., A multivariate exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variability. Journal of Applied Statistics, 30, 507-536, (2003).

[17] Sugiura N. and Nagao H., Unbiasedness of some test criteria for the equality of one or two covariance matrices. The Annals of Mathematical Statistics, 30, 1686-1692, (1968).

[18] Yeh A.B., Huwang L. and Wu C.W., A multivariate EWMA control chart for monitoring process variability with individual observations. IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering, 37, 1023-1035, (2005).

[19] Ostadsharifi Memar A., Akhavan Niaki T., New Control Charts for Monitoring Covariance Matrix with Individual Observations. Quality and Reliability Engineering International; 25:821–838, (2009).

[20] Chan L.K. and Zhang J. Cumulative sum control charts for the covariance matrix. Statistica Sinica, 11, 767-790, (2001).

[21] Ryan T.P., Statistical Methods for Quality Improvement; New York: Wiley, (1989).

[1] Cumulative Sum Control Chart
[2] Exponentially weighted Moving Average
[3] Average Run Lengths