



Paper Type: Original Article

A Covering Location Model in Uncertain Random Networks Based on Ideal Chance Distribution

Citation:

Received: ----	A Covering Location Model in Uncertain Random Networks Based on Ideal
Revised: ----	Chance Distribution . <i>Journal of Decisions and Operations Research</i> , Volume (Issue),
Accepted:---	PP.

Abstract

Purpose: This paper investigates the discrete covering location problem on a network where the establishment costs of facilities and the penalty costs for uncovered customers can be random or uncertain variables. A covering model is formulated based on the concept of the ideal chance distribution function, and an algorithm is proposed to obtain the optimal set of covering facilities on an uncertain random network

Methodology: The approach used to solve the covering location problem on an uncertain random network is the ideal chance distribution function approach. The results of the numerical example demonstrate the effectiveness of the proposed method in determining the optimal set of covering facilities. The findings of this study can help decision-makers make facility location decisions based on the distributional behavior of costs when facility establishment costs and uncovered customer penalties are simultaneously random and uncertain, rather than relying on mean values or individual scenarios. Furthermore, considering both facility establishment costs and uncovered-customer penalties simultaneously in facility location decisions can provide a more appropriate basis for selecting facility locations

Findings: Using the ideal chance distribution function approach, algorithms are proposed to solve the covering location problem on uncertain random networks.

Originality/Value: The main innovation of this study is the development of an approach based on the ideal chance distribution for evaluating and selecting a set of covering facilities under uncertain random conditions. In this approach, instead of replacing random and uncertain parameters with deterministic values or considering a single scenario, the chance distribution of the performance of each facility set is compared with the ideal chance distribution, and the set with the minimum distance from the ideal distribution is selected as the optimal set.

Keywords: Ideal chance distribution function, uncertain distribution, uncertain random network, covering location problem.



2

Corresponding Author:



Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



مدل مکان‌یابی پوششی در شبکه‌های تصادفی غیرقطعی مبتنی بر تابع توزیع

شانس ایده‌آل

فاطمه تیمورزاده، فهیمه باروقی*، بهروز علی‌زاده

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه مهندسی، دانشگاه صنعتی تبریز، تبریز، ایران.

چکیده

هدف: در این مقاله به بررسی مسئله مکان‌یابی پوششی گسسته روی شبکه‌ای که هزینه تأسیس مراکز و جریمه عدم پوشش مشتریان می‌تواند متغیرهای تصادفی یا غیرقطعی باشند، پرداخته می‌شود و مدل پوششی براساس مفهوم تابع توزیع شانس ایده‌آل فرمول‌بندی می‌شود و الگوریتمی برای به‌دست آوردن مجموعه بهینه مراکز پوششی روی یک شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه می‌گردد.

روش‌شناسی پژوهش: رویکرد استفاده‌شده برای حل مسئله مکان‌یابی پوششی روی شبکه تصادفی غیرقطعی، رویکرد تابع توزیع شانس ایده‌آل است. در این مقاله، ابتدا تابع توزیع شانس ایده‌آل مسئله پوششی روی یک شبکه تصادفی غیرقطعی معرفی می‌شود و سپس یک الگوریتم برای به‌دست آوردن آن ارائه می‌گردد. در ادامه مدل پوششی براساس مفهوم تابع توزیع شانس ایده‌آل فرمول‌بندی می‌شود و الگوریتمی برای به‌دست آوردن مجموعه بهینه مراکز پوششی روی یک شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه می‌گردد.

یافته‌ها: با استفاده از رویکرد تابع توزیع شانس ایده‌آل، الگوریتم‌هایی برای حل مسئله مکان‌یابی پوششی روی شبکه‌های تصادفی غیرقطعی ارائه می‌شود. نتایج مثال عددی، کارایی روش پیشنهادی را در تعیین مجموعه بهینه مراکز پوششی نشان می‌دهد. نتایج این پژوهش می‌تواند به تصمیم‌گیرندگان کمک کند تا در شرایطی که هزینه‌های تأسیس و عدم پوشش دارای ماهیت هم‌زمان تصادفی و غیرقطعی هستند، به‌جای اتکا به مقادیر میانگین یا سناریوهای منفرد، تصمیم مکان‌یابی را بر اساس رفتار توزیعی هزینه‌ها اتخاذ کنند. همچنین، در تصمیم‌گیری برای استقرار مراکز، توجه هم‌زمان به هزینه تأسیس و جریمه عدم پوشش می‌تواند مبنای مناسب‌تری برای انتخاب مراکز فراهم کند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری اصلی پژوهش، ارائه یک رویکرد مبتنی بر تابع توزیع شانس ایده‌آل برای ارزیابی و انتخاب مجموعه مراکز پوششی در شرایط تصادفی غیرقطعی است. در این رویکرد، به‌جای جایگزین کردن پارامترهای تصادفی و غیرقطعی با مقادیر قطعی یا بررسی یک سناریوی خاص، توزیع شانس عملکرد هر مجموعه مراکز با توزیع شانس ایده‌آل مقایسه شده و مجموعه‌ای که کمترین فاصله را با حالت ایده‌آل دارد، به‌عنوان مجموعه بهینه انتخاب می‌شود.

کلیدواژه‌ها: تابع توزیع شانس ایده‌آل، توزیع غیرقطعی، شبکه تصادفی غیرقطعی، مسئله مکان‌یابی پوششی

۱- مقدمه

نظریه مکان‌یابی حوزه غنی و ارزشمندی است که دامنه وسیعی از مسائل مختلف را بررسی کرده و نقش بسیار برجسته‌ای در تحقیق در عملیات ایفا می‌کند. از جمله کاربردهای آن می‌توان به مکان‌یابی انبارها در یک زنجیره تأمین، مکان‌یابی کارخانه‌های مواد شیمیایی، مکان‌یابی مراکز بهداشتی درمانی و غیره اشاره کرد. هنگام تعیین مکان‌های بهینه برای استقرار مراکز خدماتی (برای مثال پایگاه‌های اورژانس که آمبولانس‌ها در آن مستقر بوده و منتظر اعزام می‌مانند)، غالباً با این قاعده مواجهیم که شهروندان (مانند یک فرد متقاضی خدمت) صرفاً زمانی از خدمت بهره‌مند می‌شوند که فاصله آن‌ها تا نزدیک‌ترین مرکز خدماتی از حدی مشخص کمتر باشد (برای مثال امکان رسیدن آمبولانس به محل سکونت فرد در زمانی فرض کنید $N = (V, E)$ شبکه‌ای همبند و غیرجهت‌دار با مجموعه رأسی $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و مجموعه یالی E باشد. همچنین فرض کنید در هر رأس دقیقاً یک مشتری وجود دارد. مشتری متناظر با رأس v_i را به صورت مشتری i ، $i = 1, 2, \dots, n$ نمایش می‌دهیم. اگر مشتری i از هیچ مرکزی سرویس نگیرد آنگاه جریمه نامنفی p_i برای آن تخصیص داده می‌شود. فرض کنید مکان‌های بالقوه برای استقرار مراکز زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها بوده و به صورت $V' \subseteq V$ و

$V' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ تعریف شوند. همچنین c_j ، $j = 1, 2, \dots, m$ ، هزینه نامنفی تأسیس مرکز در مکان v_j می‌باشد. پارامتر R به عنوان شعاع پوشش تعریف می‌شود، به طوری که هر مرکز قادر است مشتریانی را پوشش دهد که فاصله آن‌ها تا مرکز کمتر یا مساوی R باشد. در این مقاله پارامتر پوشش a_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر فاصله بین رأس‌های v_i و v_j کمتر یا مساوی R باشد آنگاه $a_{ij} = 1$ و در غیر این صورت $a_{ij} = 0$. مسئله مکان‌یابی پوششی عبارت است از تعیین یک زیرمجموعه از V' به گونه‌ای که مجموع هزینه‌های تأسیس مراکز و جریمه عدم پوشش مشتریان کمینه گردد. فرض کنید x_j متغیر مربوط به مکان کاندید j ام باشد که هرگاه مرکزی در مکان j ام تأسیس گردد، برابر با یک بوده و در غیر این صورت برابر با صفر است و z_i متغیر مربوط به جریمه مشتری i ام باشد که اگر مشتری i ام از هیچ مرکزی سرویس نگیرد برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است. بنابراین تابع هدف مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min \sum_j c_j x_j + \sum_i p_i z_i \quad (1)$$

به طوری که هر مشتری یا باید توسط حداقل یک مرکز پوشش داده شود و یا جریمه عدم پوشش برای آن در نظر گرفته شود. بنابراین قید پوشش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_j a_{ij} x_j + z_i \geq 1 \quad \forall i \quad (2)$$

همچنین داریم $x_j, z_i \in \{0, 1\}$.

پیشگامان بحث پوشش در ادبیات علمی، پرژ [7] و حکیمی [1] هستند. پرژ با طرح مسئله یافتن کمترین پوشش در گراف و ارائه قضیه‌ای مبتنی بر هم‌سازی، الگوریتمی برای این مسئله معرفی کرد. حکیمی نیز به مسئله تعیین حداقل گشت‌های پلیس برای پوشش یک شبکه بزرگراهی پرداخت.

مسائل پوششی عمدتاً به دو دسته تقسیم می‌شوند: پوشش مجموعه و ماکزیمم پوشش. در نوع نخست، که توسط تورگاس و همکاران [2] معرفی شد، هدف آن است که با کمترین هزینه ممکن برای استقرار مراکز، تمامی مشتریان پوشش داده شوند. اگر هزینه استقرار همه مراکز یکسان فرض شود، این مسئله به کمینه‌سازی تعداد مراکز مستقر شده تبدیل می‌شود. بررسی جواب‌های حاصل از این مسئله اغلب نشان می‌دهد که با چند مراکز محدود، درصد بالایی از تقاضا قابل پوشش است، اما برای پوشش کامل نیاز به شمار زیادی مراکز خواهد بود. از آنجا که در عمل، به دلیل محدودیت منابع یا بودجه، امکان استقرار به تعداد لازم مراکز وجود ندارد، شکل دیگری از مسئله مطرح می‌شود: با فرض استقرار تعداد مشخصی مرکز، چگونه

می‌توان بیشترین شمار مشتریان را تحت پوشش قرار داد (یا به بیانی دیگر، کمترین شمار مشتریان را بدون پوشش باقی گذاشت). این مسئله که با عنوان پوشش بیشینه شناخته می‌شود، نخستین بار توسط چرچ و روایل [3] مدل‌بندی شد. میرچندانی در [4] یک الگوریتم حریصانه برای حل مسئله مکان‌یابی پوششی ارائه داده است.

در بسیاری از مسائل مطرح در دنیای واقعی که به‌صورت مدل‌های بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌شوند، اغلب با وضعیتی روبه‌رو هستیم که پارامترها و داده‌های ورودی مسئله از عدم قطعیت برخوردار می‌باشند. برای مدل‌بندی درجات باور، نظریه عدم قطعیت توسط لیو در سال ۲۰۰۷ ارائه شد [5]. مفهوم عملگر مقدار مورد انتظار [5] و هم‌چنین خطی بودن آن [5] توسط لیو ارائه شدند. لیو و ها یک فرمول کاربردی برای محاسبه مقادیر مورد انتظار توابع یکنوازی اکید از متغیرهای غیرقطعی مستقل به‌دست آوردند [6]. مسئله مکان‌یابی پوششی مراکز خدمات اضطراری در محیط‌های غیرقطعی توسط ژانگ و همکاران در [8] ارائه شد. مدل‌های برنامه‌ریزی با محدودیت شانس برای مسائل مکان‌یابی پوششی هاب در شرایط عدم قطعیت را وانگ و همکاران در [9] ارائه کردند. هم‌چنین سلطانپور و همکاران در [10] مسئله مکان‌یابی پوششی روی شبکه‌های غیرقطعی را ارائه دادند. وانگ و همکاران در [15] به بررسی مسئله مکان‌یابی پوششی حداکثری هاب تحت شرایط غیرقطعی و با در نظر گرفتن پوشش جزئی پرداختند. واتسا و همکاران در [16]، مسئله مکان‌یابی پوششی حداکثری چنددوره‌ای ظرفیت‌دار را با در نظر گرفتن عدم قطعیت مراکز بررسی کردند. در ادامه لیو و همکاران در [17]، مسئله مکان‌یابی پوششی مشارکتی استوار را تحت عدم قطعیت تقاضا ارائه دادند. هم‌چنین چن و همکاران در [18] روش‌های پیش پردازش کارا برای حل مسائل مکان‌یابی پوشش حداکثری و مکان‌یابی پوششی جزئی مجموعه بررسی کردند. در سال ۲۰۲۵، ویراسنا و همکاران در [19] پیشرفت‌ها در تصمیم‌گیری برای مدل‌های پوشش مجموعه تحت عدم قطعیت را ارائه دادند. برخلاف روش‌های کلاسیک، این مقاله از تابع توزیع شانس ایده‌آل برای مدل‌سازی عدم قطعیت استفاده می‌کند.

سازماندهی مقاله به‌صورت زیر می‌باشد: در بخش بعدی، برخی مفاهیم پایه‌ای و ویژگی‌های نظریه عدم قطعیت و نظریه شانس معرفی می‌شوند. در بخش ۳، یک شبکه تصادفی غیرقطعی معرفی می‌گردد و یک تابع توزیع شانس ایده‌آل ارائه می‌شود. سپس الگوریتمی برای محاسبه تابع توزیع شانس ایده‌آل مسئله مکان‌یابی پوششی در شبکه تصادفی غیرقطعی پیشنهاد می‌گردد. بخش ۴ مدلی برای پیدا کردن بهترین ترکیب پوششی ارائه داده و الگوریتمی برای یافتن مسئله مکان‌یابی پوششی در یک شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه می‌کند. یک مثال عددی در بخش ۵ برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه می‌شود.

۲- مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این بخش، به معرفی برخی از مفاهیم و قضایای نظریه عدم قطعیت و نظریه شانس خواهیم پرداخت.

۲-۱- نظریه عدم قطعیت

نظریه عدم قطعیت که توسط لیو [5] مطرح شد، رویکرد جدیدی برای مواجهه با عوامل غیرقطعی ارائه می دهد. امروزه نظریه عدم قطعیت به شاخه ای از ریاضیات تبدیل شده است که برای مدل سازی عدم قطعیت انسانی براساس اصول نرمال بودن، دوگانگی، زیرجمعی بودن و اصل حاصلضربی به کار می رود. در ادامه برخی از مفاهیم مقدماتی و ویژگی های نظریه عدم قطعیت را معرفی می کنیم که در سراسر این مقاله مورد استفاده قرار می گیرد.

تعریف ۲-۱-۱ [13] فرض کنید Γ یک مجموعه ناتهی (مجموعه مرجع) و گردایه L شامل زیرمجموعه های Γ یک σ -جبر روی Γ باشد. تابع $M: L \rightarrow [0, 1]$ اندازه غیرقطعی نامیده می شود هر گاه سه اصل زیر برای آن برقرار باشد:

۱. اصل نرمال بودن: برای مجموعه مرجع Γ ، $M\{\Gamma\} = 1$.

۲. اصل دوگانگی: برای هر پیشامد Λ ، $M\{\Lambda\} + M\{\Lambda^c\} = 1$.

۳. اصل زیرجمعی: برای هر دنباله شمارا از پیشامدهای $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ ،

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\} \quad (3)$$

سه تایی (Γ, L, M) یک فضای غیرقطعی نامیده می شود. بنابراین اندازه غیرقطعی حاصلضربی M روی σ -جبر حاصلضربی L توسط اصل چهار حاصلضربی به صورت زیر تعریف می شود:

۴. اصل حاصلضربی: فرض کنید (Γ_k, L_k, M_k) برای $k = 1, 2, \dots$ ، فضاهای غیرقطعی باشند. اندازه غیرقطعی حاصلضربی M یک اندازه غیرقطعی است که

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \prod_{k=1}^{\infty} M\{\Lambda_k\} \quad (4)$$

به طوری که Λ_k ها پیشامدهای دلخواهی هستند که به ترتیب از $L_k, k = 1, 2, \dots$ انتخاب می شوند.

تعریف ۲-۲-۵ [5] یک متغیر غیرقطعی یک تابع اندازه پذیر ξ از فضای غیرقطعی (Γ, L, M) به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که $\{\xi \in B\}$ یک پیشامد برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی است.

تعریف ۲-۳-۵ [5] اگر ξ یک متغیر غیرقطعی باشد، آنگاه توزیع غیرقطعی آن به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(x) = M\{\xi \leq x\} \quad (5)$$

تعریف ۲-۴- [13] متغیرهای غیرقطعی $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای مجموعه‌های بورل دلخواه $B_1, B_2, \dots, B_n$ از اعداد حقیقی رابطه زیر برقرار باشد:

$$M\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \prod_{i=1}^n M\{\xi_i \in B_i\} \quad (6)$$

تعریف ۲-۵- [13] توزیع غیرقطعی $\Phi(x)$ منظم گفته می‌شود هرگاه یک تابع اکیدا صعودی و پیوسته نسبت به x که $0 < \Phi(x) < 1$ وجود داشته باشد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1 \quad (7)$$

تعریف ۲-۶- [14] فرض کنید ξ متغیر غیرقطعی با توزیع غیرقطعی منظم Φ باشد، آنگاه تابع معکوس Φ^{-1} توزیع غیرقطعی معکوس ξ نامیده می‌شود.

توزیع یک تابع یکنوا از متغیرهای غیرقطعی را می‌توان از قضیه زیر به دست آورد:

قضیه ۲-۱- [14] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای غیرقطعی مستقل، به ترتیب با توزیع‌های غیرقطعی منظم $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند. اگر تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نسبت به $x_1, x_2, \dots, x_n$ اکیدا صعودی باشد، آنگاه $v = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ یک متغیر غیرقطعی با تابع توزیع غیرقطعی معکوس برابر است با:

$$\psi^{-1}(\alpha) = f(\phi_1^{-1}(\alpha), \phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \phi_n^{-1}(\alpha)) \quad (8)$$

۲-۲- نظریه شانس

در این بخش برخی تعاریف مقدماتی و ویژگی‌های متغیر غیرقطعی تصادفی، اندازه شانس، توزیع شانس و قانون عملیاتی را معرفی می‌کنیم:

فرض کنید (Γ, L, M) یک فضای غیرقطعی و (Ω, A, pr) یک فضای احتمالی باشد. با فرض استقلال این دو فضا حاصل ضرب $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, Pr)$ یک فضای شانس نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۷- [11] فرض کنید $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, Pr)$ یک فضای شانس و $\theta \in L \times A$ یک پیشامد تصادفی غیرقطعی باشد. آنگاه اندازه شانس θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ch\{\theta\} = \int_0^1 Pr\{\omega \in \Omega \mid M\{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma, \omega) \in \theta\} \geq x\} dx \quad (9)$$

لیو [11] اثبات کرد که اندازه شانس دارای خواص زیر است:

$$\text{Ch}\{\Gamma \times \Omega\} = 1 \quad ۱.$$

$$\text{Ch}\{\theta\} + \text{Ch}\{\theta^c\} = 1, \theta \quad ۲. \text{ برای هر پیشامد}$$

$$\text{Ch}\{\theta_1\} \leq \text{Ch}\{\theta_2\}, \theta_1 \subset \theta_2 \quad ۳. \text{ برای هر مجموعه اعداد حقیقی}$$

به علاوه، هو [12] اثبات کرد اندازه شانس زیرجمعی است. یعنی برای هر دنباله شمارا از پیشامدهای $\theta_1, \theta_2, \dots$ داریم:

$$\text{Ch}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \theta_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{Ch}\{\theta_i\} \quad (۱۰)$$

تعریف ۲-۸- [11] یک متغیر تصادفی غیرقطعی یک تابع ξ از فضای شانس $(\Gamma, L, M) \times (\Omega, A, Pr)$ به مجموعه ای از اعداد

است به طوریکه $\{\xi \in B\}$ یک پیشامد در $L \times A$ از مجموعه دلخواه بول B اعداد حقیقی است.

تعریف ۲-۹- [11] اگر یک متغیر تصادفی غیرقطعی باشد، آنگاه توزیع شانس آن به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(x) = \text{Ch}\{\xi \leq x\} \quad (۱۱)$$

تابع توزیع شانس یک متغیر تصادفی فقط توزیع احتمال آن است و توزیع شانس یک متغیر غیرقطعی فقط توزیع غیرقطعی آن است.

قضیه ۲-۲- [11] فرض کنید $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ متغیرهای تصادفی مستقل به ترتیب با توزیع های احتمالی $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ باشند و فرض کنید $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ متغیرهای غیرقطعی مستقل به ترتیب با توزیع های غیرقطعی منظم $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ باشد. همچنین فرض کنید $f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ نسبت به $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ اکیدا صعودی و نسبت به $\tau_{k+1}, \dots, \tau_n$ اکیدا نزولی باشد. آنگاه متغیر تصادفی غیرقطعی $\xi = f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ دارای توزیع شانس

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^m} F(x; y_1, y_2, \dots, y_m) d\psi_1(y_1) d\psi_2(y_2) \dots d\psi_m(y_m) \quad (۱۲)$$

که در آن $F(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ تابع توزیع غیرقطعی متغیر غیرقطعی $f(y_1, y_2, \dots, y_m, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ برای اعداد حقیقی $y_1, y_2, \dots, y_m$ است.

۳- تابع توزیع شانس ایده آل مدل مکان یابی پوششی در شبکه های تصادفی غیرقطعی

در این بخش، یک شبکه تصادفی غیرقطعی معرفی می شود و یک الگوریتم برای یافتن تابع توزیع شانس ایده آل پوششی ارائه می گردد. فرضیات حل مسئله به شرح زیر است:

۱. شبکه داده شده همبند و غیرجهت دار است.

۲. هزینه تأسیس مراکز و جریمه عدم پوشش مشتریان یا متغیرهای غیرقطعی مثبت و یا متغیرهای تصادفی مثبت هستند.

۳. همه متغیرهای تصادفی و متغیرهای غیرقطعی مستقل هستند.

۴. هر مرکز می‌تواند مشتریان در فاصله کوچکتر مساوی R را پوشش دهد.

تعریف ۳-۱- فرض کنید $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس شبکه باشد و همچنین فرض کنید

$$\mathcal{U} = \{\theta_j | \text{هزینه تأسیس غیرقطعی است}\} \cup \{\sigma_i | \text{جریمه عدم پوشش غیرقطعی است}\} \quad (13)$$

$$\mathcal{R} = \{\theta_j | \text{جریمه عدم پوشش تصادفی است}\} \cup \{\sigma_i | \text{هزینه تأسیس تصادفی است}\} \quad (14)$$

و W مجموعه تمام هزینه‌ها باشد. در این صورت چهارتایی $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ شبکه تصادفی غیرقطعی نامیده می‌شود.

فرض کنید ξ_j و δ_i به ترتیب نشان‌دهنده هزینه‌ی تأسیس سرویس‌دهنده j ، $\theta_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}$ و جریمه سرویس نگرفتن مشتری i ،

$\sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}$ هستند. تعریف کنید $\xi = \{\xi_j | \theta_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}\}$ و $\delta = \{\delta_i | \sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}\}$.

قضیه ۳-۱- شبکه تصادفی غیرقطعی $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید هزینه‌ی تأسیس مرکز j متغیر غیرقطعی ξ_j و جریمه سرویس نگرفتن مشتری i متغیر غیرقطعی δ_i ، به ترتیب دارای توزیع‌های غیرقطعی منظم ψ_j و ψ_i باشند و همچنین هزینه‌ی تأسیس مرکز j متغیر تصادفی ξ_j و جریمه سرویس نگرفتن مشتری i متغیر تصادفی δ_i ، به ترتیب دارای توزیع‌های احتمالی ψ_j و ψ_i باشند. در این صورت توزیع شانس ایده‌آل متناظر با شبکه $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ برابر است با

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}) \prod_{\theta_j \in \mathcal{R}} d\psi_j(z_j) \prod_{\sigma_i \in \mathcal{R}} d\psi_i(z_i) \quad (15)$$

که در آن $\varphi(x)$ تابع توزیع شانس مقدار بهینه تابع هدف در مسئله مکان‌یابی پوششی است و در این رابطه $F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ تابع توزیع غیرقطعی مقدار تابع هدف مسئله مکان‌یابی پوششی تحت یک سناریوی مشخص از هزینه‌های تصادفی و غیرقطعی است و با تابع توزیع غیرقطعی معکوس

$$F^{-1}(\alpha; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}) \quad (16)$$

که برابر است با

$$f_C(z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}; Y_j^{-1}(\alpha), Y_i^{-1}(\alpha) | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U}) \quad (17)$$

تعیین می‌گردد. مقدار f_C به عنوان مقدار بهینه تابع هدف از حل مسئله مکان‌یابی پوششی تحت سناریوهای مختلف با پارامترهای تصادفی و غیرقطعی به دست می‌آید.

برهان- فرض کنید $f_C = (\xi_j, \delta_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R})$ مقدار بهینه مسئله پوششی برای تمام هزینه‌ها باشد. با توجه به تعریف تابع توزیع شانس، برای هر $x \in \mathcal{R}$ داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Ch\{f_C(\xi_j, \delta_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}) \leq x\} \\ &= \int_0^1 pr\{w_1 \in \Omega_1, w_2 \in \Omega_2 | M\{f_C(\xi_j(w_1), \delta_i(w_2) | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}, \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U}) \leq x\} \geq r\} dr \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty M\{f_C(\xi_j(w_1), \delta_i(w_2) | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}, \xi_j, \delta_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U}) \leq x\} \prod_{\theta_j \in \mathcal{R}} d\psi_j(z_j) \prod_{\sigma_i \in \mathcal{R}} d\psi_i(z_i) \end{aligned} \quad (18)$$

برای مقادیر مشخص z_j و z_i از پارامترهای تصادفی، تابع $F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ تابع توزیع غیرقطعی متغیر غیرقطعی

$$f_C(z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}; \xi_j, \delta_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U}) \quad (19)$$

به‌ازای اعداد حقیقی z_j و z_i می‌باشد و با تابع توزیع غیرقطعی معکوس

$$F^{-1}(\alpha; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}) \quad (20)$$

تعیین می‌گردد. از آنجا که پارامترهای تصادفی θ_j و σ_i دارای توزیع‌های احتمالی ψ_j و ψ_i هستند، با در نظر گرفتن تمامی مقادیر ممکن z_j و z_i ، تابع توزیع شانس برابر است با:

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}) \prod_{\theta_j \in \mathcal{R}} d\psi_j(z_j) \prod_{\sigma_i \in \mathcal{R}} d\psi_i(z_i) \quad (21)$$

حال اگر مقادیر متغیرهای غیرقطعی نیز مشخص و ثابت در نظر گرفته شوند و مقادیر پارامترهای تصادفی نیز برابر با سناریوی مشخص باشند، تمامی پارامترهای مسئله قطعی خواهند شد. در نتیجه، مسئله مکان‌یابی پوششی به یک مسئله قطعی تبدیل می‌شود و مقدار بهینه آن به‌ازای $\alpha \in (0,1)$ برابر است با:

$$f_C(z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}; Y_j^{-1}(\alpha), Y_i^{-1}(\alpha) | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{U}) \quad (22)$$

پیدا کردن تابع توزیع شانس ایده‌آل با استفاده از فرمول (۱۵) مشکل است. لذا برای پیدا کردن تابع توزیع شانس ایده‌آل پوششی در شبکه تصادفی غیرقطعی الگوریتم زیر را ارائه می‌دهیم:

الگوریتم ۱- (تابع توزیع شانس ایده‌آل پوششی در شبکه تصادفی غیرقطعی داده شده را پیدا می‌کند)

گام ۱- به ازای z_j و z_i و $\theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}$ افرازهای Π_j و Π_i از بازه‌های $[a_i, b_i]$ و $[a_j, b_j]$ را با گام $\Delta = 0.01$ تعیین کنید. فرض کنید متغیرهای تصادفی θ_j و σ_i ، به ترتیب مقادیر

$$\begin{aligned} \{\theta_j | \theta_j = a_j + 0.01 * i, \forall i = 1, 2, \dots, (b_j - a_j) * 100\}, \\ \{\sigma_i | \sigma_i = a_i + 0.01 * i, \forall i = 1, 2, \dots, (b_i - a_i) * 100\} \end{aligned} \quad (23)$$

را از Π_j و Π_i بگیرند.

گام ۲- به ازای هر θ_j و σ_i داده شده و هر $\alpha \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$ ، برای محاسبه $F^{-1}(\alpha; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ مدل مکان‌یابی پوششی را حل کنید و مقدار تابع هدف بهینه را برای هر سطح اطمینان به دست آورید.

گام ۳- تابع توزیع غیرقطعی $F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ را با درونیابی خطی از فرم گسسته آن به دست آورید.

گام ۴- $F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ را در معادله (۱۵) قرار داده و تابع توزیع شانس ایده‌آل $\varphi(x)$ را بیابید.

۴- مدل مکان‌یابی پوششی در شبکه‌های تصادفی غیرقطعی

در این بخش، مسئله مکان‌یابی پوششی روی شبکه‌های تصادفی غیرقطعی فرمول‌بندی شده و الگوریتمی برای پیدا کردن مجموعه مراکز ارائه می‌شود. شبکه همبند غیرجهت‌دار $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس شبکه باشد و اگر $x_j = 1$ آنگاه در رأس v_j مرکز احداث شود و در غیر این صورت صفر می‌شود. همچنین فرض کنید اگر $z_i = 1$ آنگاه مشتری v_i پوشش داده نمی‌شود و در غیر این صورت صفر می‌باشد و اگر $a_{ij} = 1$ آنگاه مرکز v_j به مشتری v_i سرویس می‌دهد و در غیر این صورت صفر می‌باشد.

$$\begin{cases} \sum_{v_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} a_{ij} x_j + z_i \geq 1 \\ x_j, z_i \in \{0, 1\} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\forall v_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R} \\ &\forall v_j, v_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R} \end{aligned} \quad (24)$$

برای مجموعه تصمیم (X, Z) هزینه کل برابر است با

$$\sum_{\theta_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} \theta_j x_j + \sum_{\sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} \sigma_i z_i \quad (25)$$

باتوجه به ماهیت تصادفی غیرقطعی، پارامترهای هزینه تأسیس مراکز و جریمه عدم پوشش مشتریان، هزینه کل نیز یک متغیر تصادفی غیرقطعی است. تابع توزیع شانس آن با $\Phi(x)$ نشان داده می‌شود و مطابق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Phi(x) = Ch\left\{ \sum_{\theta_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} \theta_j x_j + \sum_{\sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} \sigma_i z_i \leq x \right\} \quad (26)$$

اکنون، این الگوریتم را برای به دست آوردن تابع توزیع شانس ایده آل متناظر با مجموعه تصمیم مراکز پوششی ارائه می دهیم:

الگوریتم ۲- (تابع توزیع شانس ایده آل برای یک مجموعه مراکز پوششی خاص را پیدا می کند)

گام ۱- گسسته سازی متغیرهای تصادفی

فرض کنید متغیرهای تصادفی θ_j و σ_i ، به ترتیب مقادیر

$$\{\theta_j | \theta_j = a_j + 0.01 * i, \forall i = 1, 2, \dots, (b_j - a_j) * 100\} \quad (27)$$

$$\{\sigma_i | \sigma_i = a_i + 0.01 * i, \forall i = 1, 2, \dots, (b_i - a_i) * 100\}$$

را بگیرند.

گام ۲- به ازای هر θ_j و σ_i داده شده و هر $\alpha \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$ ، برای محاسبه $F^{-1}(\alpha; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ هزینه کل برای مجموعه مراکز پوششی خاص را پیدا کنید.

گام ۳- تابع توزیع غیرقطعی $F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ را با درونیابی خطی از فرم گسسته آن به دست آورید.

گام ۴- $F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R})$ را در معادله

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty F(x; z_j, z_i | \theta_j, \sigma_i \in \mathcal{R}) \prod_{\theta_j \in \mathcal{R}} d\psi_j(z_j) \prod_{\sigma_i \in \mathcal{R}} d\psi_i(z_i) \quad (28)$$

قرار داده و تابع توزیع شانس ایده آل $\varphi(x)$ را بیابید.

قضیه ۳-۲- فرض کنید $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ شبکه تصادفی غیرقطعی و $\varphi(x)$ تابع توزیع شانس ایده آل مسئله پوششی در شبکه باشد. همچنین فرض کنید $\Phi(x)$ تابع توزیع شانس برای یک مجموعه مراکز پوششی باشد. در این صورت داریم:

$$\Phi(x) \leq \varphi(x) \quad (29)$$

برهان- با توجه به تعریف تابع توزیع شانس ایده آل، این تابع بیانگر مطلوب ترین وضعیت عملکردی مسئله است. از آنجا که هدف مسئله کمینه سازی هزینه کل شامل هزینه تأسیس مراکز و جریمه عدم پوشش مشتریان است، تابع توزیع شانس ایده آل متناظر با توزیع هزینه با کمترین مقدار ممکن در نظر گرفته می شود. بنابراین، برای هر تابع توزیع شانس مجموعه مراکز پوشش، رابطه زیر برقرار است:

$$\Phi(x) \leq \varphi(x) \quad (30)$$

تعریف زیر برای پیدا کردن مجموعه مراکز بهینه پوششی در شبکه تصادفی غیرقطعی $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ ارائه می شود.

تعریف ۳-۲- فرض کنید $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ شبکه تصادفی غیرقطعی و $\varphi(x)$ تابع توزیع شانس ایده آل برای مسئله پوششی باشد. همچنین فرض کنید $\Phi(x)$ تابع توزیع شانس مجموعه مراکز پوششی $\{x_j, z_i\}$ باشد. مجموعه تصمیم $\{x_j, z_i\}$ را مجموعه بهینه پوششی شبکه تصادفی غیرقطعی می نامیم اگر $\int_0^\infty \{\varphi(x) - \Phi(x)\} dx$ مینیمم باشد. در واقع هدف یافتن مجموعه مراکز پوششی است که تابع توزیع شانس آن بیشترین نزدیکی را به تابع توزیع شانس ایده آل داشته باشد، فاصله بین این دو تابع به عنوان معیار انتخاب در نظر گرفته می شود. بنابراین، مجموعه بهینه مجموعه ای است که این فاصله را در میان تمامی مجموعه های مجاز کمینه کند.

پیش از ارائه مدل بهینه‌سازی، اجزای اصلی مدل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

- V : مجموعه رئوس شبکه
- I : مجموعه مشتریان
- J : مجموعه مکان‌های بالقوه استقرار مراکز پوششی
- d_{ij} : فاصله بین مشتری i و مرکز بالقوه j
- R : شعاع پوشش مرکز
- θ_j : هزینه تأسیس مرکز در راس j
- σ_i : جریمه عدم پوشش مشتری i
- a_{ij} : پارامتر پوشش که در صورت پوشش مشتری i توسط مرکز j برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است.
- x_j : متغیر تصمیم دودویی که در صورت استقرار مرکز در راس j برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است.
- y_{ij} : متغیر تصمیم دودویی که در صورت پوشش مشتری i توسط مرکز j برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است.

در شبکه تصادفی غیرقطعی، پارامترهای هزینه تأسیس مراکز θ_j و جریمه عدم پوشش مشتریان σ_i می‌توانند برحسب ماهیت مسئله، متغیرهای تصادفی یا غیرقطعی باشند.

بنا به تعریف بالا و مطالب بیان شده، مدل بهینه‌سازی زیر برای پیدا کردن مجموعه بهینه مراکز پوششی ارائه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^\infty \{\varphi(x) - \Phi(x)\} dx \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{v_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} a_{ij} x_j + z_i \geq 1 \quad \forall v_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R} \\ & x_j, z_i \in \{0, 1\} \quad \forall v_j, v_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R} \end{aligned} \quad (31)$$

رابطه بالا بیان می‌کند که مجموعه بهینه، مجموعه‌ای است که کمترین فاصله را از تابع توزیع شانس ایده‌آل داشته باشد. بنابراین، کمینه‌سازی این فاصله، معیار انتخاب مجموعه بهینه در شرایط تصادفی غیرقطعی است. برای هر مجموعه تصمیم $\{x_j, z_i\}$ ، عملکرد آن براساس هزینه تأسیس مراکز انتخاب شده و جریمه مشتریان تحت پوشش قرار نگرفته تعیین می‌شود. باتوجه به اینکه این پارامترها می‌توانند تصادفی یا غیرقطعی باشند، تابع توزیع شانس عملکرد مجموعه $\{x_j, z_i\}$ مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Phi(x) = Ch \left\{ \sum_{\theta_j \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} \theta_j x_j + \sum_{\sigma_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{R}} \sigma_i z_i \leq x \right\} \quad (32)$$

الگوریتم زیر برای پیدا کردن مجموعه بهینه مراکز پوششی در شبکه تصادفی غیرقطعی $(V, \mathcal{U}, \mathcal{R}, W)$ ارائه می‌شود:

الگوریتم ۳- (مجموعه بهینه مراکز پوششی را پیدا می‌کند)

گام ۱- تابع توزیع شانس ایده‌آل را با استفاده از الگوریتم ۱ بیابید.

گام ۲- در شبکه تصادفی غیرقطعی داده شده، کاندیدهای مجموعه تصمیم را تولید کنید.

گام ۳- تابع توزیع شانس هریک از کاندیدهای مجموعه تصمیم را با استفاده از الگوریتم ۲ بیابید.

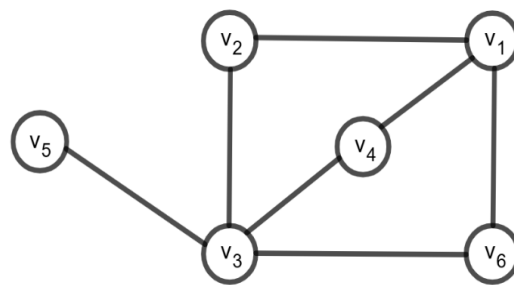
گام ۴- به ازای هر کاندید مجموعه تصمیم مقدار بهینه مدل بهینه سازی بالا را محاسبه کنید.

گام ۵- بهترین مجموعه تصمیم با کمترین مقدار بهینه، مجموعه بهینه مراکز پوششی شبکه است.

۵- مثال عددی

در این بخش، یک مثال برای مسئله مکان‌یابی پوششی در یک شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه می‌دهیم تا الگوریتم‌های پیشنهادی را تشریح کنیم.

شبکه زیر شامل مجموعه رأسی $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ را در نظر بگیرید (شکل ۱) که هر رأس می‌تواند مرکز (با هزینه تأسیس θ_j) یا مشتری (با جریمه عدم پوشش σ_i) باشد. هدف انتخاب مجموعه مراکزی است به طوری که تابع توزیع شانس مجموعه مراکز بیشترین نزدیکی را به تابع توزیع شانس ایده‌آل داشته باشد.



شکل ۱- شبکه مثال عددی.

Figure 1- The network of numerical example.

داده‌های هزینه تأسیس و جریمه عدم پوشش برای هر رأس در جدول ۱ آورده شده است که در آن $U(a, b)$ نشان‌دهنده متغیر تصادفی و $L(a, b)$ نشان‌دهنده متغیر غیرقطعی است. تابع توزیع شانس ایده‌آل مرتبط با شبکه برابر است با

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty F(x; z_4, z_2) d\psi_4(z_4) d\psi_2(z_2) \quad (33)$$

جدول ۱- هزینه تأسیس مرکز و جریمه پوشش ندادن مشتریان در مثال عددی.

رأس	θ_j	σ_i
v_1	5	$L(4,6)$
v_2	$L(1,3)$	$U(2,3)$
v_3	$L(3,5)$	8
v_4	$U(1,3)$	$L(1,2)$
v_5	6	$L(3,5)$

The

v_6	$L(1,2)$	2
-------	----------	---

Table 1-

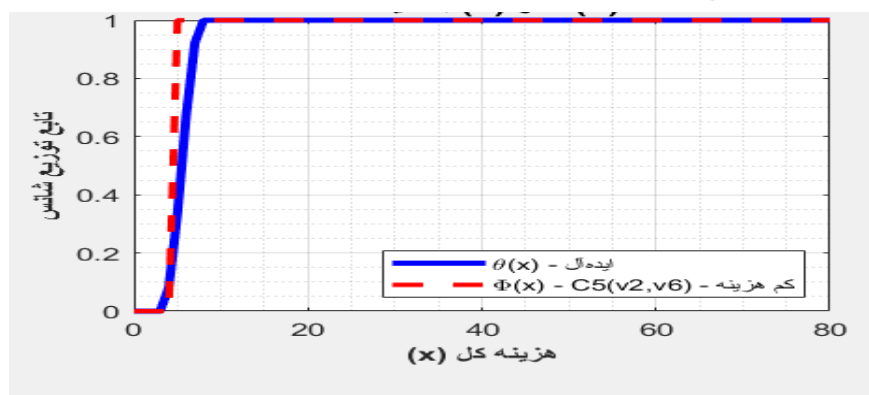
establishment cost of facility and the penalty cost for not covering customers in numerical Example.

که $F(x; z_4, z_2)$ با توزیع غیرقطعی معکوس زیر تعیین می گردد:

$$F^{-1}(\alpha; x_4, x_2) = f(\psi_1^{-1}(\alpha), \psi_2^{-1}(\alpha), \psi_3^{-1}(\alpha), z_4, \psi_5^{-1}(\alpha), \psi_6^{-1}(\alpha), \psi_1^{-1}(\alpha), z_2, \psi_3^{-1}(\alpha), \psi_4^{-1}(\alpha), \psi_5^{-1}(\alpha), \psi_6^{-1}(\alpha)) \quad (34)$$

به ازای هر z_4 و z_2 به ترتیب از مجموعه های $\{z_4 \mid z_4 = 1 + 0.01i, i = 1, \dots, 500\}$ و $\{z_2 \mid z_2 = 2 + 0.01i, i = 1, \dots, 500\}$ و هر

مقدار $\alpha \in \{0.01, 0.02, \dots, 0.99\}$ را با استفاده از الگوریتم حل مسئله مکان یابی پوششی پیدا می کنیم. با استفاده از درونیایی خطی گسسته تابع توزیع غیرقطعی $F(x; z_4, z_2)$ را به دست آورده و با جایگذاری در معادله (۱۵)، تابع توزیع شانس ایده آل $\Phi(x)$ به صورت شکل ۲ به دست می آید. تابع توزیع شانس بهترین ترکیب پوششی $C_5(v_2, v_6)$ را با استفاده از الگوریتم ۳ به دست می آوریم.



شکل ۲- مقایسه تابع توزیع شانس ایده آل و تابع توزیع شانس ترکیب $C_5(v_2, v_6)$.

Figure 2- Comparison of the ideal chance distribution function and the chance distribution function of the combination $c_5(v_2, v_6)$

برای هر ترکیب پوششی تابع توزیع شانس هزینه کل به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Phi(x) = \text{Ch}\left\{\sum_{\theta_j \in \mathcal{Z} \cup \mathcal{R}} \theta_j x_j + \sum_{\sigma_i \in \mathcal{Z} \cup \mathcal{R}} \sigma_i z_i \leq x\right\}$$

که برای هر ترکیب پوششی فاصله آن از تابع توزیع شانس ایده آل به صورت انتگرال زیر محاسبه می شود:

$$\int_0^{\infty} \{\varphi(x) - \Phi(x)\} dx$$

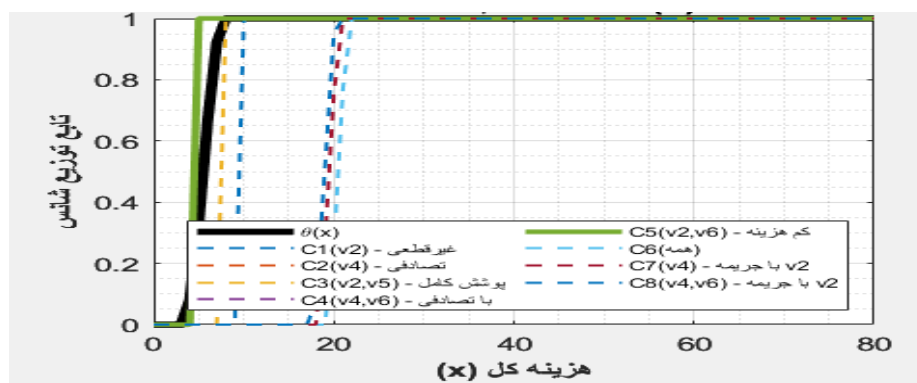
ترکیب های پوششی زیر مورد ارزیابی قرار گرفته اند که مقدار $\int_0^{\infty} \{\varphi(x) - \Phi(x)\} dx$ برای ترکیب های پوششی که $\varphi(x)$ تابع توزیع شانس ایده آل است به صورت زیر محاسبه شده است:

جدول ۲- ترکیب های پوششی.

Table 2- Covering Combinations.

ترکیب	$\int_0^{\infty} \{\varphi(x) - \Phi(x)\} dx$	تفسیر
$c_5(v_2, v_6)$	1.151	بهترین ترکیب - نزدیکترین به تابع توزیع شانس ایده آل
$c_3(v_2, v_5)$	2.012	خوب - کمی دورتر
$c_1(v_2)$	4.012	متوسط
$c_4(v_4, v_6)$	13.482	ضعیف - خیلی دورتر
$c_2(v_4)$	13.994	ضعیف تر
$c_6(v_2, v_4, v_5, v_6)$	14.995	بدترین - دورترین از تابع توزیع شانس ایده آل

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، ترکیب پوششی $c_5(v_2, v_6)$ با کمترین مقدار فاصله از تابع توزیع شانس ایده‌آل 1.151، بهترین عملکرد را داشته و به عنوان ترکیب بهینه انتخاب می‌شود. در مقابل، با افزایش فاصله از تابع توزیع شانس ایده‌آل، کیفیت ترکیب‌های پوششی کاهش یافته و ترکیب $c_6(v_2, v_4, v_5, v_6)$ با مقدار 14.995 ضعیف‌ترین عملکرد را در میان ترکیب‌های بررسی شده نشان می‌دهد.



شکل ۳- مقایسه تمام توابع توزیع شانس ترکیب‌های پوششی.

Figure 3- Comparison of all chance distribution functions of covering combinations.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل مکان‌یابی پوششی در شبکه‌های تصادفی غیرقطعی مبتنی بر تابع توزیع شانس ایده‌آل ارائه شد. در این چارچوب، عدم قطعیت‌های تصادفی و غیرقطعی به صورت یکپارچه مدل‌سازی شده و تابع توزیع غیرقطعی مقدار بهینه مسئله پوششی استخراج گردید. سپس با استفاده از مفهوم شانس ایده‌آل، معیار نهایی ارزیابی و تصمیم‌گیری تعریف شد. برای حل مدل، یک الگوریتم عددی مبتنی بر گسسته‌سازی یکنواخت با گام 0.01 توسعه داده شد که با استفاده از سطوح اطمینان و درونیابی خطی امکان محاسبه عملی تابع توزیع غیرقطعی را فراهم می‌کند. این ساختار، علاوه بر سادگی محاسباتی، قابلیت باز تولید نتایج را نیز تضمین می‌کند. نتایج نشان می‌دهد مدل پیشنهادی توانایی مناسبی در مدیریت هم‌زمان عدم قطعیت‌های تصادفی و غیرقطعی داشته و یک چارچوب کارآمد برای مسائل مکان‌یابی پوششی در محیط‌های پیچیده ارائه می‌دهد.

منابع:

- [1] Hakimi, S. L. (1965). Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. *Operations Research*, 13(3), 462-475.
- [2] Toregas, C., Swain, R., ReVelle, C., & Bergman, L. (1971). The location of emergency service facilities. *Operations Research*, 19(6), 1363-1373.
- [3] Church, R., ReVelle, C. (1974). The maximal covering location problem. *Journal of Regional Science Association*, 32(1), 101-118.
- [4] Mirchandani, B. P., Francis, R. L. (1990). *Discrete location theory*. John Wiley.
- [5] Liu, B. (2007). *Uncertainty Theory*. Springer-Verlag.
- [6] Liu, Y. H., Ha, M. (2010). Expected value of function of uncertain variables. *Journal of Uncertain Systems*, 4(3), 181-186.
- [7] Berge, C. (1957). Two theorems in graph theory. *Proc natl Acad USA*, 43(9), 842-844.
- [8] Zhang, B., Peng, J., & Li, Sh. (2017). Covering location problem of emergency service facilities in an uncertain environment. *Elsevier*, 51, 429-447.
- [9] Wang, J., Qin, Z. (2020). Chance constrained programming models for uncertain hub covering location problems. *Soft Computing*, 24(4), 2781-2791.
- [10] Soltanpour, A., Baroughi, F., & Alizadeh, B. (2018). Investigation on some facility location problems in uncertain environments, Ph.D thesis, Sahand University of Technology Department of Mathematics.
- [11] Liu, Y. H. (2013). Uncertain random variables: a mixture of uncertainty and randomness. *Soft Computing*, 17, 625-634.
- [12] Hou, Y. C. (2014). Subadditivity of chance measure. *J. Uncertain. Anal*, 2(14), 1-8.

- [13] Liu, B. (2009). Some research problems in uncertainty theory. *Journal of uncertain systems*,3(1), 3-10.
- [14] Liu, B. (2010). *Uncertainty theory. A branch of mathematics for modeling human uncertainty*. Springer.
- [15] Wang, J., Qin, Zh. (2021). Modelling and analysis of uncertain hub maximal covering location problem in the presence of partial coverage. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*,40(5), 9987-10002.
- [16] Vatsa, A. K., Jayaswal, S. (2021). Capacitated multi-period maximal covering location problem with server uncertainty. *European Journal of Operational Research*,289(3), 1107-1126.
- [17] Liu, H., Song, G. (2022). Employing an Effective Robust Optimization Approach for Cooperative Covering Facility Location Problem under Demand Uncertainty,11(9).
- [18] Chen, L., Chen, Sh., Chen, W., Dai, Y., Quan, T., Chen, J. (2023). Efficient presolving methods for solving maximal covering and partial set covering location problems. *European Journal of Operational Research*,311(1), 73-87.
- [19] Weerasena, L., Aththanayake, Ch., Bandara, D. (2024). Advances in the decision-making of set covering models under uncertainty,355(3), 2817-2842.