یک روش نیم‌پارامتری برای بهینه‌سازی مسائل چند پاسخی: مطالعه موردی در بهبود کیفیت دستگاه تزریق پلاستیک

مهران توکلی
پژوهش‌گر آمار اجتماعی و اقتصادی، دانشگاه علامه طباطبایی
محمد بامنی‌مقدم
(نویسنده مسئول) استاد، دانشگاه علامه طباطبایی*

چکیده بهینه‌سازی چندپاسخی که با روش رویه‌ی پاسخ انجام می‌شود، بسیار پرکاربرد است. قبل از بهینه‌سازی، نیازمند انتخاب و برازش مدل مناسب برای هر پاسخ هستیم. یک مسئله اصلی که ممکن است به دلیل برازش نادرست مدل‌ها و نرسیدن به راه‌حل‌های بهینه اتفاق بیفتد، بدمشخص‌سازی مدل است. روش مدل رگرسیونی استوار که یک روش نیم‌پارامتری برای براورد است می‌تواند از هر دو روش براورد پارامتری و ناپارامتری در مقابل بدمشخص‌سازی مدل عملکرد مناسب‌تری داشته باشد. در این پژوهش، استفاده از یک روش مدل رگرسیونی استوار برای بهبود براورد مدل پیشنهاد شده است و برازش‌های مناسب هر یک از پاسخ‌ها با یکی از روش‌های بهینه‌سازی چندپاسخی یعنی تابع مطلوبیت بررسی خواهد شد. در ادامه، یک مطالعه کاربردی برای مقایسه‌ی روش‌های پارامتری، ناپارامتری و نیم‌پارامتری ارائه می‌شود. نتیجه‌های این مطالعه نشان می‌دهند که عملکرد مدل رگرسیونی استوار، در بسیاری از موقعیت‌ها و همچنین در مرحله‌ی مدل‌سازی، از دو روش دیگر مناسب‌تر است. بنا بر این، نتیجه‌های بهینه‌سازی با مدل رگرسیونی استوار بسیار قابل اعتمادتر هستند.

کلمات کلیدی روش‌شناسی رویه‌ی پاسخ، بهینه‌سازی چندپاسخی، تابع مطلوبیت، روش نیم‌پارامتری، مدل رگرسیونی استوار

۱- مقدمه

همان‌گونه که مید و پایک [1] اظهار داشته‌اند، بسیاری از ایده‌های بنیادین روش‌های رویه‌ی پاسخ (RSM) از سال‌های ۱۹۳۰ مورد استفاده و بحث بوده است. از کاربردهای روش رویه‌ی پاسخ می‌توان به تحقیق‌های باکس و ویلسون [2] در زمینه کشاورزی و مسائل صنعتی برای گردآوری داده‌ها و برازش مدل‌های آماری نام برد. طرح‌های پرکاربرد از روش‌شناسی رویه‌ی پاسخ عبارت‌اند از: طرح مرکب مرکزی و طرح باکس- بنکن که مربوط به طرح‌های استاندارد برای گرداوری و مدل‌سازی هستند. مهم‌ترین طرح از روش‌شناسی رویه‌ی پاسخ که قادر است مدل‌های مرتبه دوم را به داده‌های گرداوری شده برازش دهد، طرح مرکب مرکزی است. مدل‌سازی مدل‌های مرتبه‌ی دوم به سه روش پارامتری، ناپارامتری و نیم‌پارامتری انجام می‌شود. ونینگ و بن [3] نشان دادند که روش پارامتری ممکن است با انتخاب مدل نادرست برای داده‌ی گرداوری شده روبه‌رو باشد، روش ناپارامتری را پیشنهاد کردند. ناداریا [4] و واتسون [5] به معرفی این روش پرداخته بودند. فان و جیگ‌بلز [6] روش رگرسیون چندجمله‌ای موضعی را پیشنهاد دادند. ونینگ و بن [3]، فان و جیگ‌بلز [7]، اندرسون و پریویت [8]، پیکل [9]، پیکل و همکاران [10]، مثال‌هایی از کاربردهای ناپارامتری در RSM را بیان کردند. ونینگ و بن [3] از یک روش ناپارامتری برای براورد واریانس فرایند استفاده کرده‌اند. هاردل [11]، اندرسون و پریویت [8] برای روش ناپارامتری از روش‌های رگرسیون هسته (کرنل) و رگرسیون خطی موضعی استفاده کرده‌اند. مایز و بیرچ [12] روش‌های مختلف از انتخاب پهنای باند را مطرح نموده و روشی برای انتخاب پهنای باند در تابع هسته، پیشنهاد کردند.

روش‌های رگرسیونی استوار توسط اینسپورن و بیرچ [13] ، مایز و همکاران [14]، رابینسون [15]، هاردل و همکاران [16] و پیکل [9] پیشنهاد شدند که این مدل ترکیب محدبی از دو روش ناپارامتری و پارامتری همراه با پارامتر آمیخته λ است. مایز و همکاران [14] برای این‌که برازش‌ها دارای اریبی کم‌تری نسبت به شیوه‌ی پارامتری و دارای واریانس کم‌تری از شیوه‌ی ناپارامتری

*(Corresponding author) bamenimoghadam@atu.ac.ir

باشند، روش مدل رگرسیونی استوار را معرفی کردند. همچنین یک مقدار بهینه از پارامتر آمیخته را پیشنهاد دادند.

روش‌های رگرسیونی چندمتغیری و چندگانه‌ی چندمتغیری، در نوشته‌های رنچر [17] آمده است و خوری [18] بهینه‌سازی همزمان ناپارامتری را برای چندین متغیر پاسخ مطرح کرده است. سپس، ون و بیرچ [19] یک روش نیم‌پارامتری را برای بهینه‌سازی چندپاسخی ارائه دادند.

در این مقاله، به بهینه‌سازی چندین عامل با روشی نیم‌پارامتری به نام روش مدل رگرسیونی استوار می‌پردازیم. ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا در بخش ۲ روش پارامتری و روش براورد متغیرها و در بخش ۳ به مدل‌سازی و براورد به روش‌های ناپارامتری می‌پردازیم. سپس در بخش ۴، روش نیم‌پارامتری را ارائه کرده و در بخش ۵ یافته‌های عددی حاصل از روش‌های پارامتری، ناپارامتری و نیم‌پارامتری را مقایسه می‌کنیم. در بخش ۶ نتیجه‌های بهینه از آزمایش ارائه می‌شود و در بخش ۷ نتیجه‌گیری آورده خواهد شد.

۲- روش پارامتری

یک مدل چندجمله‌ای مرتبه‌ی دوم به‌صورت زیر است:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_j + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_j^2 + \varepsilon. \tag{۱}$$

چندجمله‌ای مرتبه‌ی اول یا دوم در عمل کاربرد زیادی دارند و یک مدل مرتبه‌ی دوم کامل به‌صورت زیر است:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\, x_{ji} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{jj} x_{ji}^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} \beta_{jl}\, x_{ji}\, x_{li} + \varepsilon_i. \tag{۲}$$

که در آن، βها ضریب‌های رگرسیونی مجهول و $j=1,\dots,k$ و $l = 1,\dots,k$ هستند.

براورد رویه‌های پاسخ با مدل مرتبه‌ی دوم (۲) از مزایای طرح‌های رویه‌ی پاسخ است و چنانچه β_{jj}ها همگی صفر باشند، آن‌گاه مدل مرتبه‌ی دوم به مدل مرتبه‌ی اول با اثرهای متقابل تبدیل خواهد شد. اگر β_{jj} ها و β_{jl} ها صفر باشند، آن‌گاه مدل مرتبه‌ی دوم تبدیل به مدل مرتبه‌ی اول می‌شود. یک مدل مرتبه‌ی دوم با n مشاهده را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$y = X\beta + \varepsilon. \tag{۳}$$

y بردار n بعدی، X ماتریس $n \times (1 + 2\,k + k(k-1)/2)$ و β بردار $(1 + 2\,k + k(k-1)/2)$ بعدی از پارامترهای مجهول و ε برداری n بعدی از خطای تصادفی هستند. بنا بر این، براورد پارامترهای مجهول و بردار پاسخ از روش کم‌ترین توان‌های دوم معمولی (ols) با مینیمم کردن خطاهای تصادفی (ε_i) به دست می‌آید.

۲- ۱- روش کم‌ترین توان‌های دوم معمولی

این روش که از معادله‌های نرمال نتیجه می‌شود شامل واریانس ثابتی از خطاهای تصادفی است که بهترین براوردگرهای ناریب خطی (BLUE) از $\hat{\beta}$ را برای β فراهم می‌کند. بنا بر این، براورد ols از پارامتر β با انتخاب کم‌ترین مقدار از مجموع توان‌های دوم خطا (SSE) ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i^{ols})^2. \tag{۴}$$

که در آن، $\hat{y}_i^{ols} = x_i'\hat{\beta}$ و x_i' ردیف iاُم از ماتریس X است. اگر ε_iها از بردار خطای تصادفی به توزیع نرمال همگرا باشند، آن‌گاه براوردگر ols معادل با براوردگر ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) می‌شود. به‌علاوه این‌که تعیین براوردی از $\hat{\beta}$ تحت توزیع نرمال، واریانس همه‌ی براوردگرهای ناریب را حد اقل می‌کند، یعنی $\hat{\beta}$ یک براوردگر ناریب با واریانس حد اقل و به‌طور یکنواخت معروف به UMVUE است. بردار ols از $\hat{\beta}$ و $\hat{y}$ به ترتیب در زیر نشان داده شده است:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}^{(ols)} &= X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y \\ &= H^{(ols)}y\,. \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن، $H^{(ols)}$ ماتریس مربعی n بعدی و معلوم و به ماتریس تصویر یا HAT معروف است. پاسخ‌های مشاهده شده با تصویر کردن ماتریس HAT، به مقدارهای براوردشده‌ی $\hat{y}^{(ols)}$ تبدیل می‌شوند. معادله‌ی بالا با مقدار برازش $\hat{y}_i$ در مکان $\hat{x}_i$، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{y}_i^{(ols)} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^{(ols)}\, y_j = h_i'^{(ols)} y. \tag{۷}$$

که در آن، $h_{ij}^{(ols)}$ درایه‌ی سطر iام و ستون jام از ماتریس $H^{(ols)}$ و $h_i'^{(ols)}$، iامین ردیف از $H^{(ols)}$ هستند. در معادله‌ی، $\hat{y}_i^{(ols)}$

براورد پاسخ در مکان x_i از میانگین وزنی مشاهده‌های y_i است و وزن‌ها همان درایه‌های سطر iام از $H^{(ols)}$ یعنی $h_{ij}^{(ols)}$ هستند.

۳- روش ناپارامتری

اگر نتوان یک رابطه‌ی دقیق تابعی بین متغیرهای ورودی و پاسخ‌ها فراهم کرد یا این‌که تابع پارامتری دقیق نباشد، در عمل استفاده از روش پارامتری نادرست است و روش ناپارامتری در انتخاب و براورد مدل، روش انعطاف‌پذیرتری خواهد بود. مه‌یرز (۱۹۹۹) استفاده از روش رویه‌ی پاسخ ناپارامتری (NPRSM) را در ۳ مقوله پیشنهاد داده است:

۱ - زمانی‌که تمرکز اصلی آزمایش روی بهینه‌سازی باشد نه روی براورد پارامترها،

۲ - زمانی‌که محقق علاقه‌ای به تشکیل تابع نداشته باشد و بیش‌تر طراحی رویه‌ی پاسخ مدنظرش است و

۳ - زمانی‌که تابعی ناخطی از رابطه‌ی بین متغیرهای ورودی و پاسخ معرفی شود.

ساده‌ترین روش ناپارامتری همان رگرسیون هسته است که حالت‌های زیادی از آن در مقاله هاردل [11] آمده است. یک رگرسیون چندجمله‌ای موضعی (LPR) تعمیمی از رگرسیون هسته است. رگرسیون هسته برازش ثابت‌های موضعی را لحاظ می‌کند، امّا LPR با برازش چندجمله‌ای موضعی که دارای وزن‌های متفاوت است، انجام می‌شود. روش چندجمله‌ای موضعی ممکن است از مرتبه‌ی اول یا بالاتر باشد امّا در این مطالعه، تمرکزمان روی مرتبه‌ی اول است که به روش رگرسیون خطی موضعی (LLR) شناخته می‌شود. برازش LLR در مکان x_0 به‌صورت زیر است:

$$\hat{y}_0^{(LLR)} = \tilde{x}_0' \, (\tilde{X}' \, W_0 \, \tilde{X})^{-1} \, \tilde{X}' \, W_0 y \ . \qquad (۸)$$

که در آن، $W_0 = h_{0\,j}^{(KER)}$ ماتریس قطری n بعدی است و $h_{0\,j}^{(KER)}$ وزن هسته مربوط به فاصله‌ی x_j' از x_0' به‌ازای $j =$ nو ... و1 و $\tilde{x}_0' = (1\, x_{10} \ ... \ x_{k\,0})$ هستند.

$$h_{0\,j}^{(KER)} = \frac{K(\mathrm{x}_0 \text{ و } \mathrm{x_j})}{\sum_{j=1}^{n} K(\mathrm{x}_0 \text{ و } \mathrm{x_j})} . \qquad (۹)$$

اگر ماتریس طرح با n تکرار به‌صورت $\tilde{X}$ تعریف شود:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1' \\ \tilde{x}_2' \\ \vdots \\ \tilde{x}_n' \end{pmatrix} . \qquad (۱۰)$$

که در آن، $\tilde{x}_i' = (1\, x_{1\,i} \ ... \ x_{ki})$ بردار طرح در iاُمین مشاهده است. در ادامه، براورد متغیرهای پاسخ به روش LLR، در زیر آمده است:

$$\hat{y}^{(LLR)} = H^{(LLR)} \, y \ . \qquad (۱۱)$$

که در آن، $H^{(LLR)}$ یک ماتریس HAT از LLR است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^{(LLR)} = \begin{pmatrix} h_1'^{(LLR)} \\ h_2'^{(LLR)} \\ \vdots \\ h_n'^{(LLR)} \end{pmatrix} . \qquad (۱۲)$$

که در آن، $h_i'^{(LLR)} = \tilde{x}_i' \, (\tilde{X}' \, W_i \, \tilde{X})^{-1} \, \tilde{X}' \, W_i$ است. برازش‌های LLR شامل تابع وزنی هسته و وابسته به اندازه پارامتر هموارساز (پهنای باند) است که در ادامه به انتخاب و تعیین آن پرداخته می‌شود.

۳- ۱- تعیین پارامتر هموارساز

یک پارامتر هموارساز تحت عنوان پهنای باند (b)، برای هموارسازی تابع براورد شده و در نتیجه براورد ضریب‌های رگرسیونی و پاسخ‌ها در تابع‌های هسته وجود دارد. اگر مقدار b خیلی کوچک باشد، منحنی دارای همواری بسیار کم و همچنین اریبی کم امّا دارای واریانس بالایی است و اگر مقدار آن بزرگ باشد، منحنی داده‌ها بسیار هموار و دارای واریانس کم است امّا اریبی براوردها افزایش می‌یابد. در نتیجه، تعیین و انتخاب یک مقدار مناسب از این پارامتر بسیار ضروری است. روش‌های بسیاری برای انتخاب پهنای باند مناسب وجود دارد ولی در تمامی روش‌ها، لازم است پهنای باند طوری انتخاب شود تا مقدار میانگین توان دوم خطا، مینیمم باشد. از جمله مشتق‌های میانگین توان دوم خطا، یک روش اعتبارسنجی متقابل تاوانیده با نام مجموع توان‌های دوم خطای پیش‌بینی شده با دو بار اصلاح (PRESS**) است که در سال ۲۰۰۲ توسط مایز و بیرچ برای انتخاب یک پهنای باند مناسب پیشنهاد شد. در این ارتباط، مقدار انتخابی b که با حد اقل شدن PRESS** تعریف می‌شود عبارت است از:

$$\frac{PRESS}{n - trace(H^{(LLR)}) + (n-(k+1))\frac{SSE_{max}-SSE_b}{SSE_{max}}}$$

که در آن، SSE_{max} بزرگ‌ترین مجموع توان‌های دوم خطا برای همه‌ی پهناهای باند، SSE_b مجموع توان‌های دوم خطا برای مقدار مخصوص b و k تعداد متغیرهای ورودی است. مجموع توان‌های دوم خطای پیش‌بینی (PRESS) عبارت است از:

$$PRESS = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_{i,-i}\right)^2. \qquad (۱۳)$$

که در آن، $\hat{y}_{i,-i}$ نشان‌دهنده پاسخ براورد شده با خروج iاُمین مشاهده از بردار است.

روش‌های پارامتری و ناپارامتری به‌دلیل وجود برخی محدودیت‌ها، ممکن است عملکرد مناسبی نداشته باشند. پس ترکیبی از روش‌های پارامتری و ناپارامتری را اتخاذ می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از هر دو دیدگاه، دقت مورد نیاز را حاصل نماییم. این‌گونه مدل‌ها که به مدل‌های نیم‌پارامتری معروف هستند، می‌توانند به‌عنوان یک ابزار قوی جایگزین نگرش‌های قبلی آمارشناسان شوند. از این‌رو، روش نیم‌پارامتری برای اصلاح آسان و دقیق‌تر براوردها و تنظیم متغیرهای بهینه‌سازی به کار می‌روند.

۴- روش مدل رگرسیونی استوار

روش نیم‌پارامتری از معایب دو شیوه‌ی قبلی اجتناب کرده و برازش مدل را با روش مدل رگرسیونی استوار (MRR) انجام می‌دهد. مدل (۱۴)، ترکیب محدبی از روش‌های ناپارامتری و پارامتری همراه با پارامتر آمیختگی λ تحت حالت دوم است که برازش مدل با فرض ثابت بودن واریانس خطاها انجام می‌شود.

$$\begin{aligned}\hat{y}^{(\mathrm{MRR2})} &= \acute{x}_0\left(\acute{X}X\right)^{-1}\acute{X}y + \lambda\acute{x}_0\left(\acute{X}W_rX\right)^{-1}\acute{X}W_r r \\ &= h^{(O\acute{L}S)}y + \lambda h_r^{(L\acute{L}R)}r\ .\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

در این روش، مقدار λ ابزاری برای تصحیح خطا و $\lambda \in [0,1]$ است. در معادله‌ی (۱۴)، $r = y - \hat{y}^{(OLS)}$ و $h_r^{(L\acute{L}R)} = \acute{x}_0\left(\acute{X}W_rX\right)^{-1}\acute{X}W_r$ و W_r یک ماتریس قطری از وزن مانده‌های r هستند.

فلسفه‌ی MRR2 این است که اگر کاربر پس از بررسی داده با دانش مطالعاتی خود، بهترین مدل پارامتری را پیشنهاد دهد، ممکن است ساختاری دیگر در داده‌ها وجود داشته باشد که توسط مدل پارامتری معرفی شده توسط کاربر، لحاظ نشده باشد. در نتیجه، این ساختار در مانده‌ها قرار خواهد گرفت. در ضمن، یک برازش ناپارامتری به این مانده‌ها، باقی ساختار مدل را توصیف می‌کند. همچنین پارامتر باید طوری تعیین و انتخاب شود که بتواند به درستی تأثیر مانده‌ها را در مدل مورد نظر نشان داده و تغییرپذیری خطایی که به سبب کوچک بودن اندازه‌ی نمونه یا پراکنده بودن داده‌ها نشأت گرفته شده را کاهش دهد.

یک مقدار بهینه از پارامتر λ توسط مایز و همکاران [14] به‌صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$\hat{\lambda}_{opt} = \frac{\langle \hat{r}^{(LLR)}, y - \hat{y}^{(OLS)}\rangle}{\|\hat{r}^{(LLR)}\|^2}. \qquad (۱۵)$$

که در آن $\hat{y}^{(OLS)}$ براورد متغیر پاسخ از روش کم‌ترین توان دوم معمولی، $\hat{r}^{(LLR)}$ براورد مانده‌های ناپارامتری از روش رگرسیون خطی موضعی، علامت $\langle 0\rangle$ نشان‌دهنده ضرب داخلی و علامت $\| 0 \|$ نمایانگر اندازه‌ی اقلیدسی استاندارد هستند.

برای m متغیر پاسخ که متغیر پاسخ را به‌طور جداگانه با روش رگرسیونی استوار دوم نشان می‌دهد. در این‌جا، دو پارامتر پهنای باند و پارامتر آمیختگی که به ترتیب با b و λ نمایش داده می‌شوند، باید به درستی تعیین شوند تا برازش مانده‌های مدل ols را پوشش دهند. رابطه‌ی تابعی صحیح برای m متغیر پاسخ از روش MRR2 در زیر نمایش داده شده است:

$$\begin{aligned}(y_{10} \ldots y_{m\,0}) = {} & \hat{x}_0'\,\beta_1 \\ & + \lambda_1\,\hat{x}_0'\,\beta_{1\,r\,0} \ldots \hat{x}_m'\,\beta_m \\ & + \lambda_m\,\hat{x}_0'\,\beta_{mr\,0} + (\varepsilon_{1\,0} \ldots \varepsilon_{m\,0}).\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن، $\hat{x}_0' = (1, x_{10}, x_{2\,0}, \ldots, x_{q\,0})$ شامل یک مدل کامل مرتبه دوم، β_j ضرایب مربوط به مدل پارامتری از ols، $B_{r\,0} = (B_{1\,r\,0}, B_{2\,r\,0}, \ldots, B_{mr\,0})$ شامل بردار دلخواه طرح از شیوه‌ی ناپارامتری بر مانده‌های مدل پارامتری و β_{jr0} براورد ضریب رگرسیونی LLR به مانده‌ی jامین پاسخ است. بردار ضریب‌های رگرسیونی $B_{r\,0} = (B_{1\,r\,0}, B_{2\,r\,0}, \ldots, B_{mr_k0})$ از روش کم‌ترین توان های دوم موضعی برای هر یک از m متغیر پاسخ به‌صورت زیر براورد می‌شوند:

$$\begin{aligned}\hat{B}_{r\,0} &= \left(\hat{\beta}_{1\,r\,0} \ldots \hat{\beta}_{m\,r\,0}\right) \\ &= [\,\tilde{x}_0'\left(\tilde{X}'W_{1\,r\,0}\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'W_{1\,r\,0}\,r_1\,, \\ &\quad \ldots, \tilde{x}_0'\left(\tilde{X}'W_{m\,r\,0}\,\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'W_{m\,r\,0}\,r_m\,].\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در آن، r_j به jامین براورد LLR بر jامین مانده‌ی مدل پارامتری، W_{jr0} یک ماتریس قطری موزون برای jامین مانده r_j در موضع x_0

را شامل می‌شوند. بنا بر این، برازش MRR2 برای هر پاسخ در موضع x_0 به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0^{(MRR2)} &= \left(\hat{y}_{10}^{(MRR2)} \dots \hat{y}_{m\,0}^{(MRR2)}\right)\\ &= (\,\hat{x}_0'\,(X'X)^{-1}\,X'y_1\\ &\quad +\hat{\lambda}_1\,\tilde{x}_0'\left(\tilde{X}'W_{1\,r\,0}\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'\,W_{1\,r\,0}\,r_1\\ &\quad \dots \tilde{x}_0'\,(X'X)^{-1}\,X'y_m\\ &\quad +\hat{\lambda}_m\,\tilde{x}_0'\left(\tilde{X}'W_{mr\,0}\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'\,W_{mr.}r_m)\\ &= \left(h_{10}^{(MRR2)'}y_1 \dots h_{m\,0}^{(MRR2)'}y_m\right). \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} h_{j\,0}^{(MRR2)'} &= \tilde{x}_0'\,(X'X)^{-1}\,X'\\ &\quad +\hat{\lambda}_j\,\tilde{x}_0'\left(\tilde{X}'W_{jr\,0}\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}'\,W_{jr\,0}\\ &\quad (I - X(X'X)^{-1}\,X'). \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

و $\hat{\lambda}_j$ها با کم‌ترین **PRESS از مدل نیم‌پارامتری تعیین می‌شوند. نتیجه‌ی بهینه در بسیاری از روش‌های رویه‌ی پاسخ از فرایند بهینه‌سازی چندپاسخی با توجه به هدف محقق انجام می‌شود.

پژوهش‌گران برای یافتن نتیجه‌ی بهینه، از سه هدف (۱) هرچه کم‌تر بهتر، (۲) هرچه بیش‌تر بهتر و (۳) رسیدن به هدفی خاص برای متغیر(های) پاسخ، استفاده می‌کنند.

بعد از مرحله‌ی مدل‌سازی، شیوه‌های بهینه‌سازی چندپاسخی به کار گرفته می‌شوند که مقدار پیش‌بینی شده‌ی پاسخ iاُم در نقطه‌ی موضعی x، به‌صورت $\hat{y}_i\,;\,i = 1$ و ... و m براورد می‌شود. در براورد متغیرهای پاسخ، iاُمین متغیر پاسخ از m متغیر هدف با متغیرهای ورودی ارتباط تابعی دارند. بنا بر این، اگر بدمشخص‌سازی مدل برای iاُمین پاسخ وجود داشته باشد، آن‌گاه باعث گمراه کردن راه‌حل‌های بهینه‌سازی و مقدارهای بهینه خواهد شد. برای بهینه‌سازی چندپاسخی (MRO) روش‌های بسیاری وجود دارند که با یافتن یک یا چندین تنظیم بهینه‌ی قابل اجرا از متغیرهای ورودی، بهترین پاسخ‌های چندگانه را نتیجه می‌دهند. روش تابع مطلوبیت از روش‌های مناسب بهینه‌سازی چندپاسخی است که می‌تواند به راحتی هدف محقق را اجرا کند.

همانطورکه گفته شد، تابع مطلوبیت هندسی یکی از مهم‌ترین روش‌های بهینه‌سازی چندپاسخی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} D(x_0) = \big[d_1\big(\hat{y}_1(x_0)\big) \times d_2\big(\hat{y}_2(x_0)\big) \dots\\ \times d_m(\hat{y}_m(x_0))\big]^{1/m}\,. \end{aligned} \qquad (20)$$

که در آن، تابع مطلوبیت D از m تابع مطلوبیت یکتای $d_i\big(\hat{y}_{\mathrm{i}}(x_0)\big)$ مربوط به براورد متغیرهای پاسخ ساخته شده است که مقدار آن در بازه‌ی صفر و یک است. توجه داشته باشید که مقدار هر تابع مطلوبیت d، بین صفر و یک است. چنانچه حد اقل یکی از آن‌ها نزدیک یا برابر با صفر باشد، مقدار D نزدیک یا برابر با صفر می‌شود و فرایند بهینه‌سازی، با استفاده از بهینه‌سازی یک‌پاسخی صورت می‌گیرد.

5- مثال عددی

در این بخش، با ارائه یک مثال عددی به مقایسه‌ی بین سه روش مدل‌سازی می‌پردازیم.

در شرکت‌های قالب‌گیری تزریقی، درخواست محصولاتی با کیفیت بالا و در عین حال با قیمت مناسب باعث شده است تا قالب‌گیر مجبور به کنترل فرایند قالب‌گیری، شکل قطعه، مشخصات ماده قالب‌گیری و روش تغییر شکل و ... شود. دو متغیر پاسخ شناسایی شده در فرایند قالب‌گیری عبارت‌اند از: عمر قالب تزریق بر حسب تعداد قطعات سالم تولید شده، زمان چرخه‌ی قالب‌گیری در دستگاه تزریق پلاستیک بر حسب ثانیه.

عامل‌های بسیاری برای بهبود فرایند قالب‌گیری و عمر قالب تزریق مؤثرند مانند جنس فولاد به کار رفته، فشار و سرعت تزریق، زمان و سرعت خنک شدن قطعه، نوع گلویی تزریق به کار رفته، دمای قالب تزریق، دمای مواد خام ذوب شده، درصد عناصر آلیاژی به کار رفته در فولاد و ... نام برد. به علت وجود محدودیتی که در محاسبه‌ی برخی مؤلفه‌ها، غیر قابل اندازه‌گیری بوده یا هزینه‌های گزاف و وقت زیاد را می‌طلبد، طرح آزمایش روی چند عامل مهم از متغیرهای قابل شناسایی طراحی شده است. در این مسئله سه عامل در درجه اهمیت بالاتری قرار دارند که عبارت‌اند از:

۱ – فشار تزریق در قالب: فشاری که برای پر کردن قالب مورد نیاز است، به وسیله یک سیستم هیدرولیکی کنترل می‌شود. دامنه فشار مربوط در قالب بین ۵۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ قابل آزمایش است.

۲ – دمای قالب تزریق: دمای سطح قالب توسط کنترل‌کننده دما با به جریان انداختن یک واسطه دمایی در قالب‌ها، چنانچه دمای فرایند بالا برود با خنک کردن، دما را به‌صورت خودکار به مقدار ثابتی نگه می‌دارد. کنترل‌کننده‌هایی که در دستگاه کنترل دما استفاده می‌شوند از نوع سه نقطه‌ای هستند که دارای موقعیت‌های

گرم کردن، خنثی، خنک‌کننده است. این دستگاه شبه پایدار می‌تواند دمای قالب را با یک مایع خنک‌کننده تا کم‌تر از ۸۰ درجه و به وسیله یک مایع گرم‌کننده تا بیش از ۲۵۰ درجه سانتیگراد کنترل کند.

۳ - درصد کروم به کار رفته در فولاد: فولادهای به کار رفته در قالب‌های تزریق، با افزایش کروم سبب استحکام، سختی پذیری، مقاومت در خوردگی، مقاومت گرمایی و مقاومت در برابر اکسیدشدن سطحی می‌شود. درصد معمول استفاده از کروم در انواع فولادها حداکثر تا ۲۰ درصد از آلیاژ است.

هدف مسئله‌ی قالب‌گیری، تعیین بیش‌ترین طول عمر قالب و کم‌ترین زمان برای تغییر چرخه در قالب‌گیری پلاستیکی است. بیش‌ترین عمر قالب با تعداد قطعات سالم و کم‌ترین زمان چرخه به مرحله‌های مختلف تزریق مربوط است. بنای تحقیق صورت گرفته برای بهینه‌سازی در تولید کالا با استفاده از قالب پلاستیکی به‌صورت تزریق است تا با افزایش کیفیت و کاهش هزینه‌ها، شرکت گستران به عملکردش در زمینه تولید قطعات نگاهی اساسی داشته باشد. بهینه‌سازی متغیرهای پاسخ با هدف‌های بالا زمانی دست‌یافتنی است که بهترین مدل پارامتری مرتبه‌ی دوم از روش طرح مرکب مرکزی مربوط به روش رویه‌ی پاسخ برازش داده شود. برای رسیدن به بهترین سطح‌های متغیرهای ورودی در آزمایش از آلگوریتم ژنتیک استفاده شده است. در جدول ۲ خلاصه‌ای از معیارهای داده‌ها نشان داده شده است.

جدول ۱: داده‌های آزمایش تزریق پلاستیک تحت عامل‌های کنترلی

شماره آزمایش	فشار	دما	درصد کروم به کار رفته	طول عمر قالب	زمان تغییر چرخه
۱	۲۱۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۳۵۶۸	۱۶۸۷
۲	۲۰۰۰۰	۸۰	۱۰	۲۰۵۶۸	۱۶۸۵
۳	۴۵۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۱۵۶۹	۱۷۸۵
۴	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۲۲	۲۱۰۵۸	۱۷۴۸
۵	۱۰۰۰۰	۲۸۰	۱۵	۱۹۵۶۵	۱۷۰۷
۶	۵۰۰۰	۸۰	۲۰	۲۵۶۹۸	۱۷۱۰
۷	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۱۵۶۲	۱۷۵۹
۸	۵۰۰۰	۲۵۰	۲۰	۱۸۶۵۵	۱۶۹۵
۹	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۴۱۱۵	۱۷۹۵
۱۰	۲۰۰۰۰	۲۵۰	۲۰	۲۵۳۴۱	۱۶۷۸
۱۱	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۴۶۲۷	۱۸۲۴
۱۲	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۴۵۶۹	۱۸۶۲
۱۳	۵۰۰۰	۸۰	۱۰	۲۳۶۵۴	۱۶۱۷
۱۴	۵۰۰۰	۲۵۰	۱۰	۱۹۸۵۴	۱۷۹۱
۱۵	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۶۵۸۲	۱۸۲۱
۱۶	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۱۵	۲۳۶۲۶	۱۷۵۸
۱۷	۲۰۰۰۰	۲۵۰	۱۰	۱۸۴۳۳	۱۷۹۴
۱۸	۲۰۰۰۰	۸۰	۲۰	۲۵۴۶۸	۱۷۲۴
۱۹	۱۰۰۰۰	۱۵۰	۸	۲۱۵۶۹	۱۷۹۳
۲۰	۱۰۰۰۰	۷۵	۱۵	۲۴۰۰۶	۱۷۹۵

جدول ۲: اطلاع مختصری از نتیجه آزمایش‌ها

متغیرها	کم‌ترین مقدار	بیش‌ترین مقدار	میانگین	انحراف معیار
طول عمر قالب	۱۸۴۳۳	۲۶۵۸۲	22704/35	2405/43
زمان تغییر چرخه	۱۶۱۷	۱۸۶۲	1751/40	60/05

فشار	۵۰۰۰	۲۰۰۰۰	11275	5562/09
دما	۸۰	۲۵۰	158/75	63/48
درصد کروم به کار رفته	۱۰	۲۰	15	3/86

۵ – ۱ - روش پارامتری

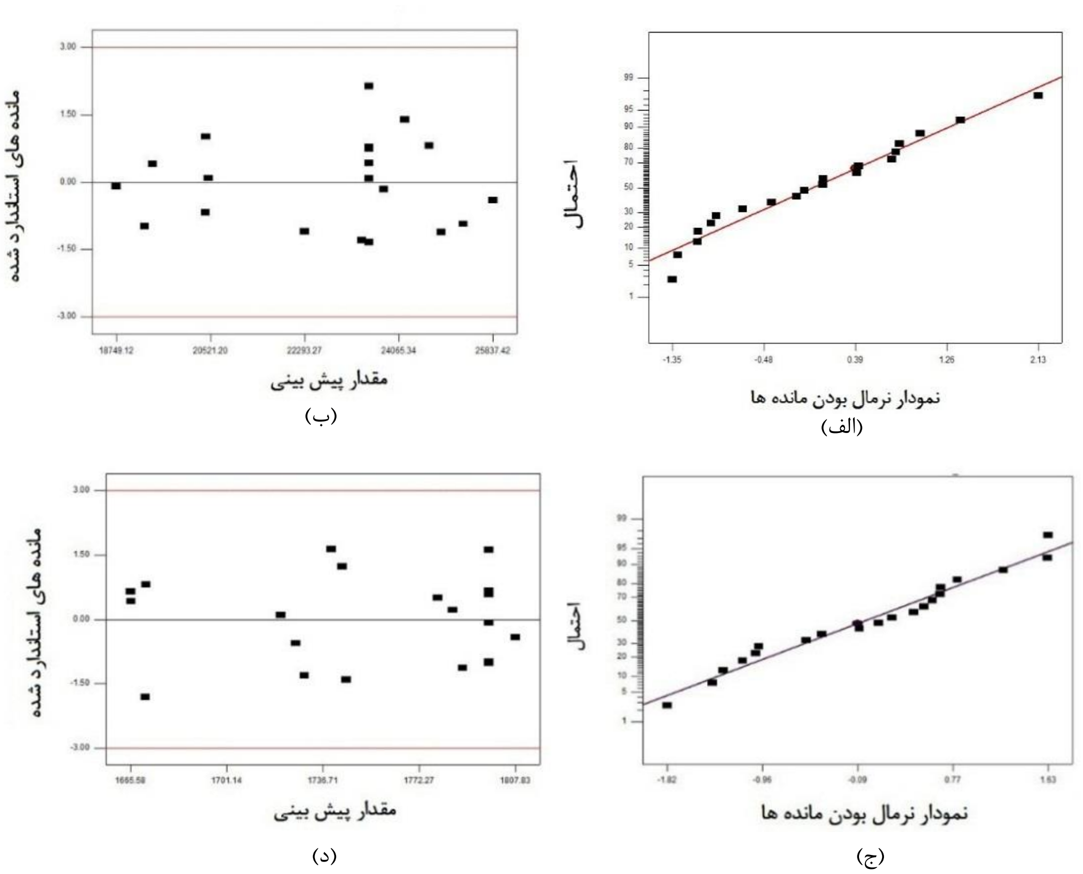
مدل پارامتری که بر داده‌های گرداوری شده از طرح مرکب مرکزی با نرم‌افزار دیزاین اکسپرت برازش شده را در زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای برازش مدل رگرسیونی باید پذیره‌های زیر تأیید شوند:

۱ – نرمال بودن مانده‌ها،

۲ – ثابت بودن واریانس مانده‌ها و

۳ – مستقل بودن مانده‌ی مشاهده‌ها.

در شکل ۱ به بررسی این پذیره‌ها برای متغیرهای طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه پرداخته شده است. نمودارها ممکن است کمی نگران‌کننده به نظر برسند زیرا در آن‌ها اثر ناهم‌واریانسی به دلیل وجود یک نظم خاص در نمودارها قابل استنتاج است. پس برای اطمینان پیداکردن از پذیره‌های رگرسیونی می‌توان آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف و شاپیرو -ویلک، آزمون لوین و آزمون گردش را به‌ترتیب برای سه پذیره‌ی رگرسیونی انجام داد.



شکل۱: نمودارهای بررسی نرمال بودن و تصادفی بودن مانده‌ها از دو متغیر پاسخ طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه

جدول ۳: آزمون‌های بررسی پذیره‌های رگرسیونی برای مانده‌ها

آزمون‌ها	کلموگروف-اسمیرنوف			شاپیرو-ویلک			لوین			
متغیرهای پاسخ	آماره	درجه آزادی	پی-مقدار	آماره	درجه آزادی	پی-مقدار	آماره	درجه آزادی۱	درجه آزادی۲	پی-مقدار
طول عمر قالب	۰/۱۸۷	۲۰	۰/۰۶۶	۰/۹۴۴	۲۰	۰/۲۸۳	۰/۴۱۳	۲	۱۵	۰/۶۶۹
زمان تغییر چرخه	۰/۱۵۷	۲۰	۰/۲	۰/۹۶۲	۲۰	۰/۵۹۴	۱/۷۷۲	۲	۱۵	۰/۲۰۴

جدول ۴: آزمون گردش

تکرار گام‌ها	طول عمر قالب	زمان تغییر چرخه
مقدار آزمون	۲۲۷۰۴/۳۵	۱۷۵۱/۴
مقدار آزمون>نمونه‌ها	۹	۹
مقدار آزمون>=نمونه‌ها	۱۱	۱۱
مجموع نمونه‌ها	۲۰	۲۰
تعداد اجراها	۱۱	۱۲
آماره Z	۰	۰/۲۷۹
پی-مقدار	۱	۰/۷۸۱

جدول ۵: تحلیل واریانس برای طول عمر قالب

اثرها	توان‌های دوم(SS)	درجه آزادی(df)	میانگین توان‌های دوم (MS)	آماره F	پی-مقدار
مدل	۸۵۹/۲۵۵	۶	۱۴۳/۲۰۹۲	۶/۲۴۸۱۵	۰/۰۰۲۸
فشار(A)	۱۵/۵۲۵۸	۱	۱۵/۵۲۵۸	۰/۶۷۷۳۸	۰/۴۲۵۳
دما(B)	۳۰۳/۱۹۰۶	۱	۳۰۳/۱۹۰۶	۱۳/۲۲۸۱	۰/۰۰۳۱
درصد کروم(C)	۱۵۹/۵۴۰۲	۱	۱۵۹/۵۴۰۲	۶/۹۶۰۶۷	۰/۰۲۰۵
AB	۹۲/۸۶۵۳	۱	۹۲/۸۶۵۳	۴/۰۵۱۶۷	۰/۰۶۵۳
AC	۱۸۸/۷۳۰۸	۱	۱۸۸/۷۳۰۸	۸/۲۳۴۲۴	۰/۰۱۳۲
C^2	۱۰۱/۸۰۱۴	۱	۱۰۱/۸۰۱۴	۴/۴۴۱۵۵	۰/۰۵۵۱
مانده‌ها	۲۹۷/۹۶۳۲	۱۳	۲۲/۹۲۰۲		
عدم برازش	۱۶۵/۱۰۵۲	۸	۲۰/۶۳۸۱	۰/۷۷۶۷	۰/۶۴۳۲
خطای برازش	۱۳۲/۸۵۷۹	۵	۲۶/۵۷۱۵		
کل	۲۰۱۸/۸۷۳	۱۹			

جدول۶: تحلیل واریانس برای زمان تغییر چرخه

اثرها	توان‌های دوم(SS)	درجه آزادی(df)	میانگین توان‌های دوم (MS)	آماره F	پی-مقدار
مدل	۴۹۲/۶۰۸	۶	۸۲/۱۰۱	۴/۶۶۷۳	۰/۰۰۹۶
فشار(A)	۰/۷۷۵	۱	۰/۷۷۵	۰/۰۴۴۱	۰/۸۳۷۱
دما(B)	۲۲/۰۸۴	۱	۲۲/۰۸۴	۱/۲۵۵۵	۰/۲۸۲۸
درصد کروم(C)	۲۴/۷۵۴	۱	۲۴/۷۵۴	۱/۴۰۷۲	۰/۲۵۶۷
BC	۱۴۴/۰۳۱	۱	۱۴۴/۰۳۱	۸/۱۸۷۹	۰/۰۱۳۴
A^2	۱۰۷/۸۵۸	۱	۱۰۷/۸۵۸	۶/۱۳۱۵	۰/۰۲۷۸
B^2	۸۸/۴۵۹	۱	۸۸/۴۵۹	۵/۰۲۸۸	۰/۰۴۳۱
مانده‌ها	۲۲۸/۶۸	۱۳	۱۷/۵۹۰۷		
عدم برازش	۱۴۵/۹۷۲	۸	۱۸/۲۴۶۴	۱/۱۰۳۱	۰/۴۷۸۷
خطای برازش	۸۲/۷۰۸۳	۵	۱۶/۵۴۱۶		
کل	۱۱۰۹/۲۵۶	۱۹			

در جدول ۴ از آزمون گردش برای تصادفی بودن آزمایش‌ها استفاده شده است و بیانگر تایید تصادفی بودن آزمایش مواد با پی‌مقدار ۰/۷۸۱ است. در شکل ۱ نمودارهای (الف) و (ج) نرمال بودن مانده‌های مدل رگرسیونی خطی را با کمی تردید نشان می‌دهند اما در جدول ۳ و ۴ آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف و شاپیرو-ویلک با قاطعیت فرض نرمال بودن را برای متغیرهای طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه تایید می‌کنند. در شکل۱ نمودارهای (ب) و (د) ممکن است اثرهای ناهم‌واریانسی وجود داشته باشد اما همانطورکه در آزمون لوین از جدول ۳ مشاهده می‌کنید، هم‌واریانسی مشاهده‌های آزمایش تایید شده‌اند. پس با تصادفی و نرمال بودن مانده‌ها، فرض استقلال هم برقرار می‌شود.

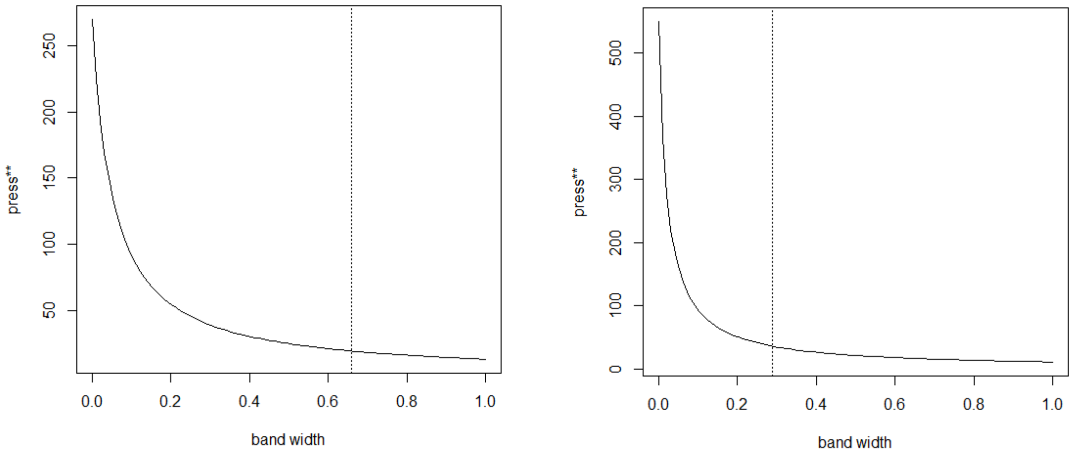
$$y_1 = 23502/9571 - 0/8268\,A - 40/2442\,B + 1040/7956\,C + 1/6586 \times 10^{-3}AB + 0/0402\,AC - 43/6767\,C^2. \quad (۲۱)$$

در جدول‌های ۵ و ۶، تحلیل واریانس هر یک از متغیرهای پاسخ را مشاهده می‌کنید که مدل‌های رگرسیونی پارامتری با عامل‌های ورودی و براورد ضریب‌های رگرسیونی از روش *ols* به دست آمده‌اند. در جدول ۷ مقدار مطلوبیت انفرادی برای هر یک از متغیرهای طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه حاصل شده است که با ضرب هندسی آن به مقدار مطلوبیت ۰/۷۹ می‌رسد. در ضمن آماره‌های *mse* و **PRESS هم مقدارهای کوچکی دارند که برای مقایسه روش‌های مدل‌سازی، مورد استفاده هستند. مدل‌هایی که در زیر به دست آمده‌اند از براورد یک مدل مرتبه دوم به هر یک از متغیرهای پاسخ طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه مربوط می‌شوند:

$$y_2 = 1271/757 + 0/024\,A + 3/5651\,B + 13/5002\,C - 0/0993\,BC - 9/73256 \times 10^{-7}\,A^2 - 5/7698 \times 10^{-3}\,B^2. \quad (۲۲)$$

جدول۷: نتیجه‌های براورد و معیارهای بهینه‌سازی از روش پارامتری

متغیر پاسخ	مقدار براورد	میانگین توان‌های دوم خطا (MSE)	R^2	R^2_{adj}	PRESS**	*d*
طول عمر قالب	۲۵۳۸۰/۲۸	۲۹/۹۲۰۲	۰/۷۴	۰/۶۲	۳۹/۵۴۶۵	۰/۸۵
زمان تغییر چرخه	۱۶۸۰/۹۵	۱۷/۵۹۰۷	۰/۶۸	۰/۵۳	۲۹/۴۸	۰/۷۳



(الف) (ب)

شکل ۳: نمودار تعیین پهنای باند برای روش ناپارامتری

۵ – ۲- روش ناپارامتری

نمودارهای شکل ۳ مربوط به تعیین پهنای باند برای هموارسازی هر یک از متغیرهای پاسخ هستند که با توجه به گام‌های گفته شده با رسیدن به بهترین مقدار، در مناسب‌ترین و کم‌ترین مقدار از PRESS** به دست آمده‌اند. پاسخ‌های مدل ناپارامتری از روش LLR براورد شده‌اند و b با مینیمم کردن PRESS** از تابع مطلوبیت بهینه به کمک آلگوریتم ژنتیک، تعیین شده است. در جدول ۸ براوردها به روش LLR با پهناهای باند مناسب و مقدار مطلوبیت ۰/۷ نتیجه شده است که پیشنهاد می‌شود از این روش، تنها برای هموارسازی استفاده شود تا در روش‌های نیم‌پارامتری به کار می‌رود.

۵ – ۳- روش نیم‌پارامتری

با توجه به بخش پارامتری و ناپارامتری از برازش‌های مدل برای متغیرهای پاسخ طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه، جدول ۹ مدل نیم‌پارامتری با λ و جواب‌های بهینه را نشان می‌دهد. دلیل انتخاب $\lambda = 1$ در جدول ۹ برای هر دو متغیر طول عمر قالب و زمان تغییر چرخه این است که ابعاد متغیرهای مدل، زیاد هستند و همچنین مدل پارامتری با بدمشخص‌سازی همراه بوده است. البته مقدار بزرگ λ برای توضیح بیش‌تر قسمت ناپارامتری بر مانده‌های مدل پارامتری مناسب است و در مثال شبیه‌سازی که شاه و همکاران [20] ارائه داده‌اند به بررسی تعیین این پارامتر با بیش‌ترین مقدار از متوسط مطلوبیت و کم‌ترین متوسط زیان توان دوم خطاها پرداخته شده است. همچنین مقدار پهناهای باند مناسب برای متغیرهای پاسخ در نمودارهای شکل ۴ نشان داده شده است. در جدول ۹ مقدارهای مطلوبیت انفرادی برای هر پاسخ به دست آمده‌اند و مطلوبیت روش MRR2 برابر ۰/۸۸ است که در مقایسه با دو روش قبل، بیش‌تر است. همچنین معیار PRESS** مدل هم دارای مقدار کم‌تری از روش‌های پارامتری و ناپارامتری است.

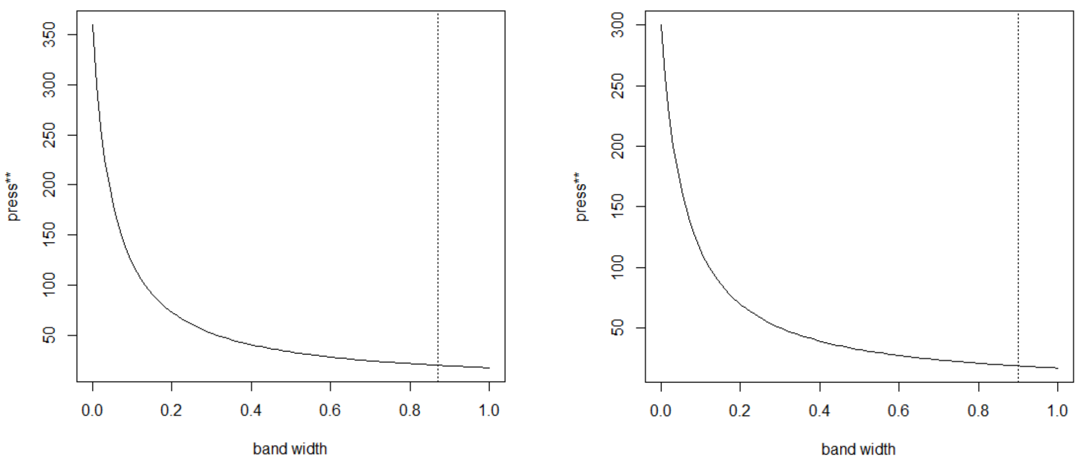
جدول۸: نتیجه‌های براورد و معیارهای بهینه‌سازی از روش ناپارامتری

متغیرهای پاسخ	پهنای باند	مقدار براورد	میانگین توان‌های دوم خطا (MSE)	R^2	R^2_{adj}	PRESS**	*d*
طول عمر قالب	۰/۲۸۹	۲۴۲۳۶/۵۶	۴۵/۶۹۸	۰/۵۴	۰/۵۱	۵۵/۶۵۲۳	۰/۷۸۶
زمان تغییر چرخه	۰/۶۵۸	۱۷۵۲/۶	۲۵/۴۶	۰/۶۸	۰/۶۱	۳۴/۵۲	۰/۶۳۱

جدول۹: نتیجه‌های براورد و معیارهای بهینه‌سازی از روش نیم‌پارامتری

متغیرهای پاسخ	پارامتر آمیخته	پهنای باند	مقدار براورد	میانگین توان‌های دوم خطا (MSE)	R^2	R^2_{adj}	PRESS**	*d*
طول عمر قالب	۱	۰/۹	۲۶۵۴۵/۸	۲۲/۵۵	۰/۸۹	۰/۸۵	۳۷/۵۶	۰/۹۵
زمان تغییر چرخه	۱	۰/۸۷	۱۶۵۹/۵	۱۷/۵۲	۰/۶۸	۰/۶۲	۲۸/۶۹	۰/۸۳

شکل ۴: نمودار تعیین پهنای باند برای روش نیم‌پارامتری



(ب) (الف)

۶- نتیجه‌ی بهینه‌سازی

استفاده از طرح‌های RSM موجب می‌شود تا سطح‌های اولیه از مواد برای بهینه کردن کالای تولیدی بدست آید و به کمک روش آلگوریتم ژنتیک مقدار دقیق عددی آن را یافت. سپس با روش‌های متفاوت، مدل‌سازی در سطح‌های مناسبی با مطلوبیت انفرادی و هندسی D نتیجه می‌شود. این سطح‌ها به عنوان مطلوب‌ترین مقدارها از متغیرهای ورودی در شرکت قالب‌سازان گستران برای افزایش طول عمر قالب و کاهش چرخه قالب‌سازی تزریقی پلاستیک بهتر است تا به کار گرفته شوند.

در زیر به ارائه‌ی سطح‌ها و میزان مطلوبیت روش‌های مدل‌سازی و براورد برای تعیین بهترین عملکرد متغیرهای ورودی یعنی فشار، دما و درصد کروم به کار رفته برای متغیرهای طول عمر قالب و مدت زمان تغییر چرخه، پرداخته شده است:

x_1= ۵۰۰۰ و x_2= ۸۰ و x_3= ۱۱/۷۹ و $\hat{y}_1$= ۲۵۳۸۰/۲۸ و $\hat{y}_2$= ۱۶۸۰/۹۵ و D = ۰/۷۹ .

x_1= ۱۰۰۰۰ و x_2= ۱۰۰ و x_3= ۱۲/۲ و $\hat{y}_1$= ۲۴۲۳۶/۵۶ و $\hat{y}_2$= ۱۷۵۲/۶ و D = ۰/۷۰ .

x_1= ۵۰۰۰ و x_2= ۱۰۰ و x_3= ۱۳/۲۶ و $\hat{y}_1$= ۲۶۵۴۵/۸ و $\hat{y}_2$= ۱۶۵۹/۵ و D = ۰/۸۸ .

۷ – نتیجه‌گیری

استفاده از روشی که بتواند میزان مواد مصرفی برای تولید کالایی را که قبل از قرار گرفتن در مرحله ساخت، بهینه کند موجب افزایش کیفیت با هزینه کمتر می‌شود. استفاده از روش نیم‌پارامتری کمک می‌کند تا بیش‌ترین همگرایی را در رسیدن به مقدار مطلوب داشته باشیم و آنچه را که در مدل پارامتری نتوانسته بودیم به مدلی رگرسیونی تبدیل کنیم، با مدلی ناپارامتری تخمین بزنیم تا از خطای براورد و ترکیب مواد و عامل‌ها بکاهیم. همانطور که به سطح‌ها و میزان مطلوبیت روش‌های بهینه‌سازی نگاه می‌کنید گویای آن است که روش مدل رگرسیونی استوار، عملکرد مناسب‌تری نسبت به دو روش دیگر دارد و سطح‌های مناسب‌تر با بازدهی بیش‌تر را ارائه داده است.

سپاس‌گزاری

این پژوهش با حمایت معنوی و مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علامه طباطبایی از هسته پژوهشی کیفیت انجام پذیرفته است.

مراجع

[1] Mead, R , & Pike, D .J. (1975), *A Review of Response Surface Methodology from a Biometric Viewpoint , Biometrics*, 31(4), 803-851.

[2] Box, G. E. P. & Wilson, K. B. (1951), *On the Experimental Attainment of Optimum conditions, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 13(1),1–15.

[3] Vining, G .G., & Bohn, L. L. (199۸*), Response Surfaces for the Mean and Variance Using a Nonparametric Approach, Journal of Quality Technology*, 30, 282-291.

[4] Nadaraya, E. (1964),*On Estimating Regression, Theory of Probability and Its Applications*,9,141-142.

[5] Watson, G. (1964), *Smoothing Regression Analysis*, Sankhya, Series A26 ,359-372.

[6] Fan, J., & Gijbels, I. (1996), *Local Polynomial Modeling and Its Applications, Chapman and Hall, London.*

[7] Fan, J. & Gijbels, I. (2000), *Local polynomial fitting, In: Schimek, M.G. (Ed.), Smoothing and Regression: Approaches, Computation, and Application, Wiley, NewYork*,229-276.

[8] Anderson-Cook, C .M., & Prewitt, K. (2005), *Parametric Methods for Modeling Data from Response Surface Designs", Journal of Modern Applied Statistical Methods*,4 ,106-119.

[9] Pickle, S. M. (2006), *Semiparametric Techniques for Response Surface Methodology Ph.D. Dissertation. Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute State University Blacksburg, VA.*

[10] Pickle, S. M., & Robinson, T. J., & Birch, J. B. & Anderson-Cook, C. M. (2006), *A SemiParametric Approach to Robust Parameter Design, Journal of Statistical Planning and Inference*.

[11] Hardle, W. (1990), *Applied Nonparametric Regression, Cambridge Univ, Press, London*.

[12] Mays, J. E. & Birch, J. B. (1998), *Smoothing Considerations in Nonparametric and Semiparametric Regression", Technical Report Number 98-2, Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute State University, Blacksburg, VA.*

[13] Einsporn, R. & Birch, J. B. (1993), *Model Robust Regression: Using Nonparametric Regression to Improve Parametric Regression Analysis, Technical Report 93-5. Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute State University, Blacksburg,VA.*

[14] Mays, J .E., & Birch, J. B. & Starnes, B.A.(2001), *Model Robust Regression: Combining Parametric, Nonparametric, and Semiparametric Methods, Journal of Nonparametric Statistics*, 13, 245-277.

[15] Robinson, P. M. (1988), *Root-N-Consistent Semiparametric Regression, Econometrica*,56,931-954.

[16] Hardle, W., & Muller, M., & Sperlich, S. & Werwatz, A. (2004), *Nonparametric and Semiparametric Models, Springer, Berlin*.

[17] Rencher, A. C. (2002), *Method of multivariate analysis, John Wiley and Sons, Inc.,New York.*

[18] Khuri, A. I. (1996). *Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions , Technometrics* , 23, 363-375.

[19] Wan, W. & Birch, j. B. (2011), *A Semiparametric Technique for the Multi-response Optimization Problem , Journal of Quality and Reliabillity Engineering International*, 27, 47-59.

[20] Shah, K. H. & Montgomery, D. C. & Carlyle, W. M. (2004), *Response Surface Modeling and Optimization in Multiresponse Experiments Using Seemingly Unrelated Regressions, Quality Engineering*, 16(3), 387-397.